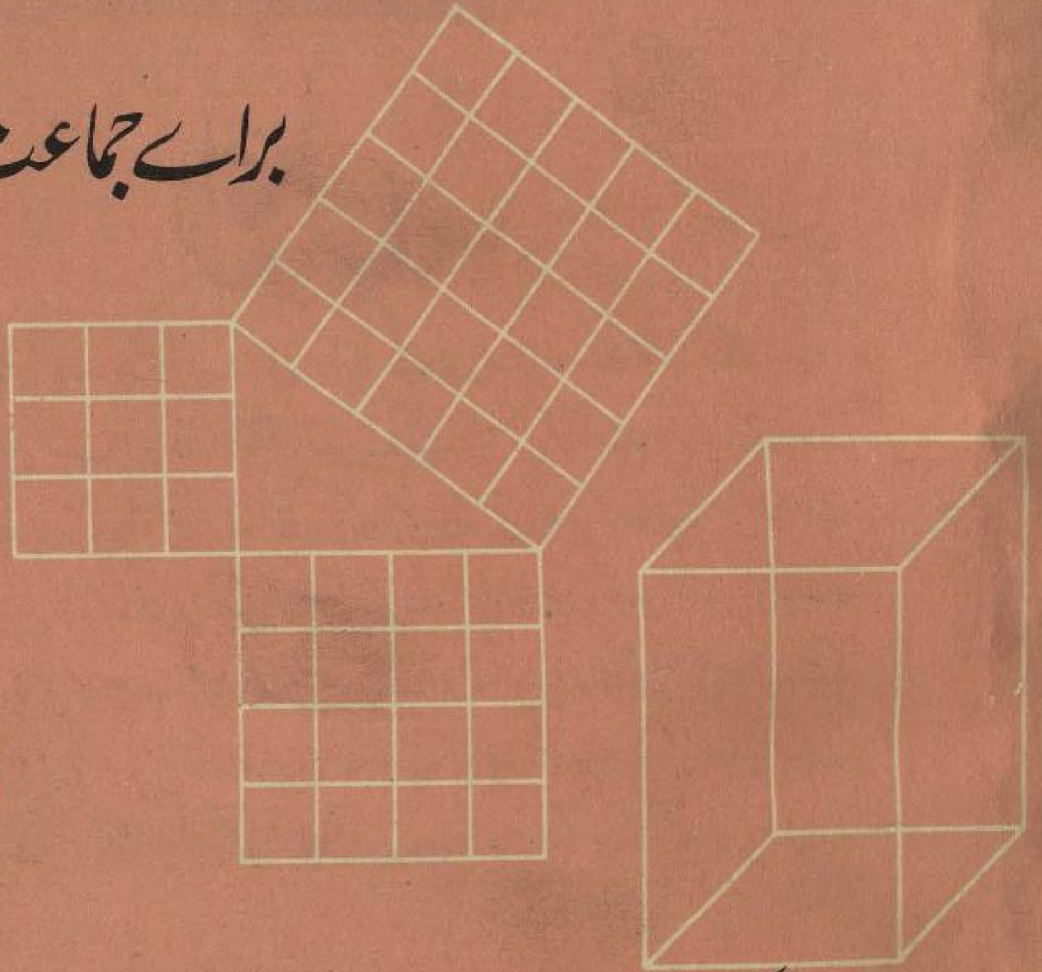
ریاضی

برائے جماعت ہشتم





مکتبۂ نعمانیہ ۱۶۰ اُردو بازار لاہور

برائے

پنجاب ٹیکسٹ بُک بورڈ، لاہور

کتاب بہترین ساتھی ہے
اس سے پیار کیجیے
اسے ضائع ہونے سے بچائیے

اپیل

پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ ایک قومی ادارہ ہے جو پنجاب کے طلبہ کے لیے معیاری اور سستی نصابی کُتب بروقت مہیا کرنے کے لیے کوشش کرتا ہے۔ مگر کچھ جعل ساز ناجائز منافع کے لیے بورڈ کی شائع کردہ کُتب کے جعلی ایڈیشن گھٹیا کاغذ پر ناقص طباعت کے ساتھ مارکیٹ میں فروخت کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور بورڈ کو مالی نقصان پہنچانے کے علاوہ اس کی بدنامی کا سبب بھی بنتے ہیں۔ طلبہ اور والدین سے توقع کی جاتی ہے کہ ایسی کُتب کی اطلاع بورڈ کو دیں تاکہ ضروری سدِّباب کیا جا سکے۔ بورڈ کی نصابی کتابوں کی نشاندہی بورڈ کے اس نشانِ خصوصی سے ہوتی ہے جو ہر کتاب کے سرورق پر چھپا ہوتا ہے۔

عبدالوحید

چیئرمین
پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ
21-ای-2-گلبرگ-3-لاہور

ریاضی

آٹھویں جماعت کے لیے



مکتبۂ نعمانیہ ۱۶ ر اُردو بازار لاہور

برائے

پنجاب ٹیکسٹ بُک بورڈ ○ لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد
مارچ 1986	اوّل	دوم	77,000

تیار کردہ : پنجاب ٹیکسٹ بورڈ، لاہور
منظور کردہ : حکومت پنجاب (محکمۂ تعلیم) لاہور
بموجب سرکلر نمبر S.O.(c) Edu. 10-8/73
مورخہ 20 نومبر 1976
بطور واحد نصابی کتاب برائے مدارس پنجاب
نظرثانی شدہ : قومی ریویو کمیٹی ، وزارت تعلیم و صوبائی رابطہ حکومت پاکستان، اسلام آباد
قومی کمیٹی برائے جائزہ کتب کی تصحیح شدہ

مصنّفین :

ڈاکٹر خواجہ غلام کبریا — ڈاکٹر رضیہ رفیق

پروفیسر محمّد امین — سیّد امیر حسین

شیخ محمّد اختر احمد

مُدیران :

ڈاکٹر خواجہ غلام کبریا — پروفیسر ایم - اے سعید

نگران : مقصود رضا احمد

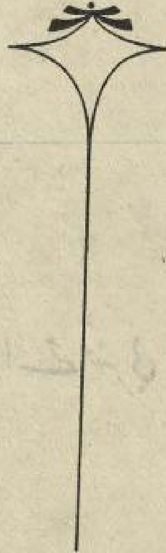
ناشر : مکتبۂ نعمانیہ چوک اردو بازار، لاہور — مطبع : نیو فائن پرنٹنگ پریس ۶، لٹن روڈ، لاہور

فہرست

باب 8

باب 9

باب 10



بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

باب 1

سیٹوں پر عوامل اور ناطق اعداد کا نظام

پچھلی جماعتوں میں آپ سیٹوں کے بارے میں بنیادی تصوّرات حاصل کر چکے ہیں۔ یہاں ان میں سے چند ایک کی مزید وضاحت کی جائے گی۔

1.1 واجب اور غیر واجب تحتی سیٹ :

آپ کو معلوم ہے کہ اگر کسی سیٹ با کا ہر رُکن سیٹ الف کا بھی رُکن ہو تو سیٹ با کو سیٹ الف کا تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے علامات میں یوں ظاہر کرتے ہیں : با ⊆ الف

مثال 1 : فرض کریں کہ الف = {1، 2، 3، ...، 10} اور با = {6، 7، 8، 9، 10}

چونکہ با کا ہر رکن الف کا بھی رکن ہے، اس لیے ظاہر ہے کہ با ⊆ الف
اسی طرح تا = {1، 2، 3، 4، 5} اور جیم = {1، 3، 5، 7، 9} بھی الف کے تحتی سیٹ ہیں۔ ان سیٹوں کے علاوہ بھی آپ الف کے کئی اور تحتی سیٹ لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2 : الف = {2، 4، 6، 8، 10، 12، 14}

با = {4، 2، 6، 12، 10، 8، 14}

ہم دیکھتے ہیں کہ با کا ہر رکن الف کا بھی رکن ہے۔ اس لیے سیٹ با سیٹ الف کا تحتی سیٹ ہے۔

لیکن اگر غور کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ در اصل با کے ممبران وہی ہیں، جو الف کے ہیں۔ صرف ممبران کی ترتیب مختلف ہے، جس سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔

اِس لیے کہ سکتے ہیں کہ سیٹ با دراصل سیٹ الف ہی ہے ۔

پس یہ کہنا دُرست ہوگا کہ سیٹ الف اپنا بھی تحتی سیٹ ہوتا ہے ۔ لہٰذا ہم لِکھ سکتے ہیں کہ الف ⊇ الف

ایسے تحتی سیٹ کو غیر واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں جبکہ کسی سیٹ کے دُوسرے تمام تحتی سیٹ ''واجب تحتی سیٹ'' کہلاتے ہیں ۔

اُوپر کی مثال 1 میں با، تا اور جیم سیٹ الف کے واجب تحتی سیٹ ہیں جبکہ سیٹ الف اپنا ہی غیر واجب تحتی سیٹ ہے ۔

واجب تحتی سیٹ کو علامت'' ⊂ '' سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ محض تحتی سیٹ کو علامت'' ⊆ '' سے ظاہر کیا جاتا ہے ۔

اب اُوپر کی مثال میں ہم لِکھ سکتے ہیں کہ :

با ⊂ الف ، تا ⊂ الف ، جیم ⊂ الف جبکہ الف ⊆ الف

واضح رہے کہ تعریف کی رُو سے ہر سیٹ اپنا ہی فوقی سیٹ بھی ہوتا ہے ، لہٰذا اُوپر کی مثال میں ہم یوں بھی لِکھ سکتے ہیں : الف ⊇ الف

واضح رہے کہ الف فوقی سیٹ ہے با، تا اور جیم کا ۔

1. تقاطع کی خاصیتِ مبادلہ :

مثال 1: اگر الف = {2، 4، 6، 8، 10} اور با = {6، 8، 10، 12، 14، 16} تو

الف ∩ با = {6، 8، 10} اور با ∩ الف = {6، 8، 10}

پس الف ∩ با = با ∩ الف

مثال 2: اگر لام = تمام مکمّل اعداد کا سیٹ اور میم = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ

تو لام ∩ میم = میم

اور میم ∩ لام = میم

پس لام ∩ میم = میم ∩ لام

مثال 3 : اگر سین = تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ

اور شین = تمام منفی صحیح اعداد کا سیٹ، تو

سین ∩ شین = ∅

اور شین ∩ سین = ∅

پس سین ∩ شین = شین ∩ سین

مندرجہ بالا مثالوں کے علاوہ آپ کوئی سے دو سیٹ الف اور با لے کر پڑتال کریں تو ہر دفعہ آپ دیکھیں گے کہ:

الف ∩ با = با ∩ الف

اسے تقاطع کی خاصیتِ مبادلہ کہتے ہیں۔

1.3 یونین کی خاصیتِ مُبادلہ:

اگر الف اور با کوئی سے دو سیٹ ہوں تو الف ∪ با = با ∪ الف

اسے یونین کی خاصیتِ مبادلہ کہتے ہیں۔

نوٹ: طلبہ سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ خود مثالیں حل کر کے اس خاصیت کو اخذ کریں۔ اگر کوئی مشکل پیش آئے تو اساتذہ کرام سے مشورہ کریں۔

مشق 1.1

(1) الف = {1، 2، 3} کے دو واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(2) با = {t, x, y, z} کے چار واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(3) لام = {2، 4، 6، 8، ....} کے تین واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(4) اگر میم = تمام مفرد اعداد کا سیٹ، تو میم کے پانچ واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(5) نون = {a, b} کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

حل: نون کے تمام واجب تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں:

{a} ، {b} ، { }

نون، اپنا ہی غیر واجب تحتی سیٹ ہے، لہٰذا نون کے تمام تحتی سیٹ

{ } ، {a} ، {b} اور {a, b} ہیں۔

(6) کاف = {1، 3} کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

(7) تا = { 0،5،2 } کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

مندرجہ ذیل سیٹوں کے جوڑوں سے پڑتال کریں کہ تقاطع اور یونین کے عوامل خاصیتِ مبادلہ رکھتے ہیں۔

(8) الف = { 10،8،6،4،2،0 } اور با = { 4،3،2،1،0 }

(9) الف = { ا، ب، ج، د، ر } اور جیم = { ب، ج، د، س }

(10) الف = تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ اور میم = تمام مفرد اعداد کا سیٹ

(11) با = { 100،...،3،2،1 } اور تا = { 90،...،3،2،1 }

(12) میم = { 1000،...،6،4،2 } اور نون = { 1000،...،12،8،4 }

(13) لام = تمام صحیح اعداد کا سیٹ اور کاف = تمام مکمل اعداد کا سیٹ

(14) الف = تمام مکمل اعداد کا سیٹ اور تا = تمام مفرد اعداد کا سیٹ

(15) جیم = تمام مفرد اعداد کا سیٹ اور لام = تمام مرکب اعداد کا سیٹ

(16) الف = { ....،5،3،1 } اور با = { ....،12،8،4 }

(17) الف = $\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ اور با = { 5،4،3،2 }

(18) اگر الف اور با کوئی سے دو سیٹ ہوں تو وین اشکال بنا کر ثابت کریں کہ

الف ∩ با = با ∩ الف اور الف ∪ با = با ∪ الف

نوٹ: وین اشکال مندرجہ ذیل تینوں صورتوں کے لیے بنائیں۔

(i) جبکہ الف اور با باہم متراکب ہوں۔

(ii) جبکہ با ⊂ الف یا الف ⊂ با۔

(iii) جبکہ الف اور با غیر مشترک ہوں۔

1.4 تین سیٹوں کا تقاطع اور یونین:

تین سیٹوں الف، با اور جیم پر تقاطع اور یونین کے عوامل کی مندرجہ ذیل صورتیں ہیں:

(i) الف ∩ (با ∩ جیم) اور (الف ∩ با) ∩ جیم

(ii) الف ∪ (با ∪ جیم) اور (الف ∪ با) ∪ جیم

(iii) الف ∩ (با ∪ جیم) (iv) الف ∪ (با ∩ جیم)

(v) (الف ∩ با) ∪ جیم (vi) (الف ∪ با) ∩ جیم

ان عوامل کی وضاحت ذیل میں دی گئی حل شدہ مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: اگر الف = {1، 2، 3، .... ، 10} ، با = {1، 3، 5، 7، 9، 11، 12}
اور جیم = {2، 4، 5، 7، 12، 20} تو الف ∩ (با ∩ جیم) اور
(الف ∩ با) ∩ جیم معلوم کریں۔

حل: آپ کو علم ہے کہ با ∩ جیم ایسے ارکان کا سیٹ ہے جو دونوں سیٹوں با اور
جیم میں مشترک ہوں۔ اس لیے با ∩ جیم = {5، 7، 12}
اب ہم الف ∩ (با ∩ جیم) معلوم کرنا چاہتے جو کہ الف اور با ∩ جیم کے
مشترک ارکان پر مشتمل ہے۔ دوسرے لفظوں میں ہم الف = {1، 2، 3، ... 10}
اور با ∩ جیم = {5، 7، 12} کا تقاطع سیٹ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔
پس الف ∩ (با ∩ جیم) = {1، 2، 3، .... ، 10} ∩ {5، 7، 12}
= {5، 7} ———— (1)

(الف ∩ با) ∩ جیم معلوم کرنے کے لیے پہلے الف ∩ با نکالیں۔ صاف ظاہر
ہے کہ (الف ∩ با) = {1، 3، 5، 7، 9}
الف ∩ با ∩ جیم تقاطع سیٹ ہے الف ∩ با اور جیم کا۔
پس (الف ∩ با) ∩ جیم = {1، 3، 5، 7، 9} ∩ {2، 4، 5، 7، 12، 20}
= {5، 7} ———— (2)

نتائج (1) اور (2) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ
الف ∩ (با ∩ جیم) = (الف ∩ با) ∩ جیم

مثال 2: اگر لام = تمام صحیح اعداد کا سیٹ ، میم = تمام مکمل اعداد کا سیٹ اور
نون = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ۔ تو لام ∩ (میم ∩ نون) اور
(لام ∩ میم) ∩ نون معلوم کریں۔

حل: میم تحتی سیٹ ہے لام کا جبکہ نون، لام اور میم دونوں کا تحتی سیٹ ہے چنانچہ
میم ∩ نون = نون

پس لام ∩ (میم ∩ نون) = لام ∩ نون = نون ——— (1)

اسی طرح چونکہ لام ∩ میم = میم ، لہٰذا

(لام ∩ میم) ∩ نون = میم ∩ نون = نون ——— (2)

نتائج (1) اور (2) سے واضح ہے کہ

لام ∩ (میم ∩ نون) = (لام ∩ میم) ∩ نون

مشاہدہ : اگر الف ، با ، جیم کوئی سے تین سیٹ ہوں جو ایک ہی سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو یاد رہے کہ الف ∩ (با ∩ جیم) = (الف ∩ با) ∩ جیم۔

آئندہ ہم الف ∩ (با ∩ جیم) یا (الف ∩ با) ∩ جیم کی بجائے محض الف ∩ با ∩ جیم لکھا کریں گے۔

مثال 3: اگر الف = {1، 2، 3، ...، 100} ، با = {-1، -2، -3، ...، -100}

اور جیم = {1، 2، 3، ....} ، تو الف ∪ (با ∪ جیم) اور (الف ∪ با) ∪ جیم معلوم کریں۔

حل : چونکہ با اور جیم غیر مشترک سیٹ ہیں ، لہٰذا

با ∪ جیم = { -1، -2، -3، ...، -100، 1، 2، 3، ....}

اب صاف ظاہر ہے کہ الف ⊂ (با ∪ جیم)، اس لیے

الف ∪ (با ∪ جیم) = با ∪ جیم

= { -1، -2، -3، ....، -100، 1، 2، 3، ....} ——— (1)

اسی طرح چونکہ الف اور با غیر مشترک سیٹ ہیں ، لہٰذا

الف ∪ با = { -1، -2، ....، -100 ، 1، 2، 3، ...، 100}

پس (الف ∪ با) ∪ جیم

= { -1، -2، ....، -100، 1، 2، ...، 100} ∪ {1، 2، 3، ....}

= { -1، -2، ....، -100، 1، 2، 3، ....} ——— (2)

نتائج (1) اور (2) سے واضح ہے کہ الف ∪ (با ∪ جیم) = (الف ∪ با) ∪ جیم

مثال 4: اگر کاف = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ ، لام = تمام مفرد اعداد کا سیٹ

اور میم = تمام مرکب اعداد کا سیٹ

تو کاف ∪ (لام ∪ میم) اور (کاف ∪ لام) ∪ میم معلوم کریں۔

حل : لام اور میم غیر مشترک سیٹ ہیں۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ '1' کے سوا ہر قدرتی عدد یا مفرد ہوتا ہے یا مرکب ، اس لیے (لام U میم) = کاف ۔ { 1 }

لہٰذا کاف U (لام U میم) = کاف U (کاف ۔{ 1 }) = کاف —— (1)

چونکہ لام ⊂ کاف ، لہٰذا (کاف U لام) = کاف

پس (کاف U لام) U میم = کاف U میم = کاف ———— (2)

(واضح رہے کہ میم ⊂ کاف)

نتائج (1) اور (2) سے ظاہر ہے کہ

کاف U (لام U میم) = (کاف U لام) U میم

مشاہدہ : اگر الف ، با ، جیم ایک ہی سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو یاد رکھیں کہ

الف U (با U جیم) = (الف U با) U جیم

پس آئندہ ہم الف U (با U جیم) یا (الف U با) U جیم کی بجائے محض الف U با U جیم لکھا کریں گے ۔

مثال 5: مثال 1 میں دیے گئے سیٹوں کے لیے

(i) الف ∩ (با U جیم) اور (ii) الف U (با ∩ جیم) معلوم کریں۔

حل : مثال 1 میں الف = {1، 2، 3، .... ، 10}

با = {1، 3، 5، 7، 9، 11، 12}

اور جیم = {2، 4، 5، 7، 12، 20}

(i) با U جیم = {1، 3، 5، 7، 9، 11، 12} U {2، 4، 5، 7، 12، 20}

= {1، 3، 5، 7، 9، 11، 12، 2، 4، 20}

= {1، 2، 3، 4، 5، 7، 9، 11، 12، 20}

پس الف ∩ (با U جیم) = {1، 2، 3، . . ، 10} ∩ {1، 2، 3، 4، 5، 7، 9، 11، 12، 20}

= {1، 2، 3، 4، 5، 7، 9} ———— (1)

(ii) با ∩ جیم = {1، 3، 5، 7، 9، 11، 12} ∩ {2، 4، 5، 7، 12، 20}

= {5، 7، 12}

پس الف ∪ (با ∩ جیم) = {1، 2، 3، .... ، 10} ∩ {5، 7، 12}

= {1، 2، 3، .... ، 10، 12} ——— (2)

نتائج (1) اور (2) سے صاف ظاہر ہے کہ

الف ∩ (با ∪ جیم) ≠ الف ∪ (با ∩ جیم)

مشاہدہ: پس یاد رہے کہ اگر الف ، با ، جیم ایک ہی سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو عمومی طور پر الف ∩ (با ∪ جیم) ≠ الف ∪ (با ∩ جیم)

مثال 6: اگر الف = {1، 2، 3، ....}

میم = {1، 3، 5، ....}

اور جیم = {2، 4، 6، ....} تو

(i) (الف ∩ میم) ∪ جیم

اور (ii) (الف ∪ میم) ∩ جیم معلوم کریں۔

حل: (i) چونکہ میم ⊂ الف ،

لہٰذا الف ∩ میم = میم

پس (الف ∩ میم) ∪ جیم = میم ∪ جیم

= {1، 3، 5، ....} ∪ {2، 4، 6، ....}

= {1، 2، 3، 4، 5، 6، ....} = الف ——— (1)

(ii) چونکہ میم ⊂ الف ،

لہٰذا الف ∪ میم = الف

پس (الف ∪ میم) ∩ جیم = الف ∩ جیم = جیم ——— (2)

(واضح رہے کہ چونکہ جیم ⊂ الف، لہٰذا الف ∩ جیم = جیم)

نتائج (1) اور (2) سے ظاہر ہے کہ

(الف ∩ میم) ∪ جیم ≠ (الف ∪ میم) ∩ جیم

مشاہدہ: اگر الف ، با ، جیم ایک ہی تحتی سیٹ کے سیٹ ہوں تو عام طور پر

(الف ∩ با) ∪ جیم ≠ (الف ∪ با) ∩ جیم

1.5 تین سیٹوں کے تقاطع اور یونین کا اظہار بذریعہ وین اشکال

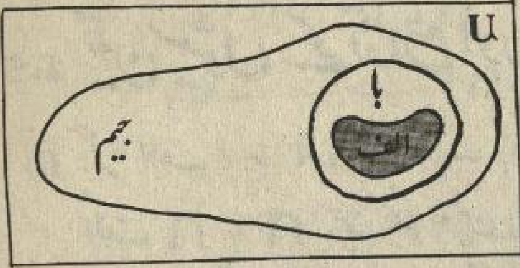
(i) اگر الف ، با اور جیم ایک ہی یونیورسل سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو ،
الف ∩ با ∩ جیم کو وین اشکال سے ظاہر کیا جا سکتا ہے ۔
الف ، با ، جیم کو وین اشکال سے ظاہر کرنے کی کئی صُورتیں ہیں ، جن میں سے کچھ نیچے دی گئی ہیں : جبکہ

(1) الف ، با ، جیم باہم متراکب ہوں ۔
(2) الف ، با ، جیم غیر مشترک ہوں ۔
(3) الف ، با باہم متراکب اور جیم ان دونوں کے ساتھ غیر مشترک ہو۔ اسی طرح کوئی سے دو سیٹ باہم متراکب اور تیسرا ان دونوں کے ساتھ غیر مشترک ہو سکتا ہے ۔
(4) الف ، با ، جیم جوڑوں میں باہم متراکب ہوں ۔
(5) الف ، با ، جیم میں سے کوئی ایک سیٹ کسی دوسرے کا تحتی سیٹ ہو ۔
(6) الف ⊃ با ⊃ جیم

یہاں الف ∩ با ∩ جیم کی صرف صورت (1) اور صورت (6) کے لیے وین اشکال بنائی جا رہی ہیں ۔ باقی صورتوں میں وین اشکال بنانا طلبہ کے لیے بطور مشق چھوڑا جا رہا ہے ۔



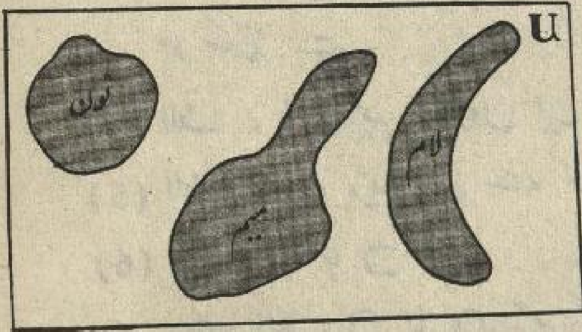
(ا) یہاں الف ، با ، جیم باہم متراکب سیٹ ہیں ، لہٰذا الف ، با ، جیم کو سامنے کی وین شکل سے ظاہر کر سکتے ہیں ۔
چونکہ الف ∩ با ∩ جیم ان تمام ارکان کا سیٹ ہے جو تینوں سیٹوں میں مشترک ہیں ، لہٰذا اس شکل کا سایہ دار حصّہ الف ∩ با ∩ جیم کو ظاہر کر رہا ہے ۔



(ب) یہاں الف ⊂ با ⊂ جیم ، لہٰذا الف ، با ، جیم کو سامنے کی وین شکل سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ اس شکل کا سایہ دار حصّہ الف ∩ با ∩ جیم کو ظاہر کر رہا ہے۔

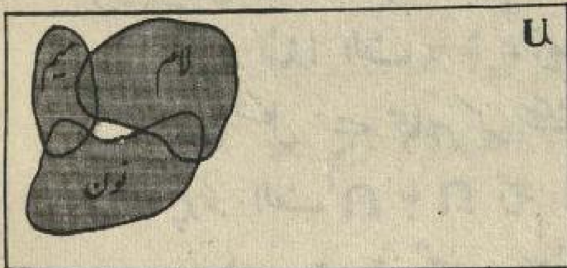
(ii) اگر لام ، میم ، نون ایک ہی یونیورسل سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو لام ∪ میم ∪ نون کو وین شکل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

یہاں لام ∪ میم ∪ نون کی صرف صورت (2) اور صورت (4) کے لیے وین اشکال بنائی جا رہی ہیں۔ باقی صورتوں میں وین اشکال بنانا طلبہ کے لیے بطور مشق چھوڑا جا رہا ہے۔



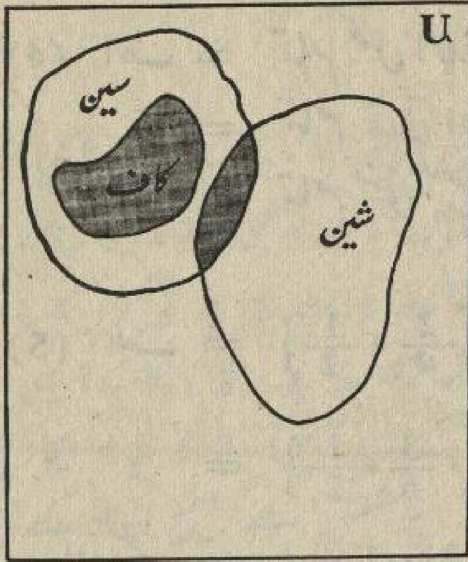
(ا) اگر لام ، میم اور نون غیر مشترک ہوں تو لام ، میم ، نون کو سامنے کی وین شکل سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

اس شکل کا سایہ دار حصّہ لام ∪ میم ∪ نون کو ظاہر کر رہا ہے۔



(ب) اگر لام اور میم ، لام اور نون ، میم اور نون باہم متراکب ہوں تو لام ، میم ، نون کو سامنے کی وین شکل سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ اس شکل کا سایہ دار حصّہ لام ∪ میم ∪ نون کو ظاہر کر رہا ہے۔

(iii) اگر سین ، شین ، کاف ایک ہی یونیورسل سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں تو (سین ∩ شین) ∪ کاف کو وین شکل سے ظاہر کرسکتے ہیں۔



یہاں ہم (سین ∩ شین) ∪ کاف کی صرف اُس صورت کے لیے وین شکل بنائیں گے جبکہ سین اور شین باہم متراکب سیٹ ہوں اور کاف تحتی سیٹ ہو سین کا، لیکن شین اور کاف باہم غیر مشترک ہوں ۔ یہاں سین ، شین اور کاف کو سامنے کی وین شکل سے ظاہر کر سکتے ہیں ۔

اس شکل کا سایہ دار حصّہ (سین ∩ شین) ∪ کاف کو ظاہر کر رہا ہے ۔

مشق 1.2

مندرجہ ذیل معلوم کریں :

(i) الف ∩ با ∩ جیم (ii) الف ∪ با ∪ جیم (iii) الف ∪ (با ∩ جیم)

(iv) الف ∩ (با ∪ جیم) (v) (الف ∪ با) ∩ جیم (vi) (الف ∩ با) ∪ جیم

جبکہ :

(1) الف = { 5،4،3،2،1 } ، با = { 7،6،5،4،3،2 } اور

جیم = { 10،9،8،7،6،5،4 }

(2) الف = 100 سے چھوٹے قدرتی اعداد کا سیٹ

با = 20- اور 20 کے درمیان صحیح اعداد کا سیٹ

اور جیم = { 50، ..... 12، 11، 10 }

(3) الف = 200 سے چھوٹے قدرتی اعداد کا سیٹ

با = پہلے پچاس قدرتی اعداد کا سیٹ

اور جیم = { 100، .... ،15، 10، 5 }

(4) الف = تمام مکمل اعداد کا سیٹ
با = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ
اور جیم = تمام منفی صحیح اعداد کا سیٹ

(5) الف = $\{\frac{1}{2}، \frac{2}{4}، \frac{3}{6}، \ldots\}$

با = $\{\frac{1}{2}، \frac{3}{6}، 1، 3\}$

اور جیم = $\{-1، -2، 0، 2، 4\}$

(6) الف = تمام صحیح اعداد کا سیٹ ، با = تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ اور
جیم = تمام منفی صحیح اعداد کا سیٹ

(7) الف = U ، با = $\varnothing$ اور جیم = $\{0\}$

(8) الف = تمام مفرد اعداد کا سیٹ ، با = تمام مرکب اعداد کا سیٹ اور

جیم = $\{\frac{1}{2}، \frac{1}{3}، \frac{1}{4}، \ldots\}$

(9) الف = 5 پر تقسیم ہونے والے قدرتی اعداد کا سیٹ
با = 10 پر تقسیم ہونے والے قدرتی اعداد کا سیٹ اور
جیم = 2 پر تقسیم ہونے والے قدرتی اعداد کا سیٹ

(10) الف = 2 پر تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا سیٹ
با = 4 پر تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا سیٹ اور
جیم = 8 پر تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا سیٹ

دفعہ 1.5 میں دی گئی چھ صورتوں میں سے ہر ایک کے لیے مندرجہ ذیل سیٹوں کو وین اشکال سے ظاہر کریں۔

(11) الف $\cap$ (با $\cup$ جیم) (12) الف $\cup$ (با $\cap$ جیم)

(13) (الف $\cap$ با) $\cup$ جیم (14) (الف $\cup$ با) $\cap$ جیم

(15) الف $\cap$ با $\cap$ جیم (16) الف $\cup$ با $\cup$ جیم

ناطق اعداد کا نظام

آپ نے عددی نظام کا مطالعہ قدرتی اعداد یعنی 1، 2، 3، 4 .... سے شروع کیا۔ جو کہ چیزوں کو ایک ایک کر کے گِننے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ اس نظام میں تفریق اور تقسیم کا عمل ہمیشہ ممکن نہیں۔ مثلاً اگر لا + 5 = 3 ہو تو کوئی ایسا قدرتی عدد نہیں جو اس مساوات کو پُورا کرے۔ دوسرے لفظوں میں (3 − 5) کا جواب قدرتی اعداد کے سیٹ میں موجود نہیں۔ اس کمی کو پورا کرنے کے لیے صحیح اعداد کا نظام ایجاد ہوا۔ صحیح اعداد کا سیٹ ....، −2، −1، 0، 1، 2، .... پر مشتمل ہے۔ صحیح اعداد کے نظام میں صفر، مثبت صحیح اعداد اور منفی صحیح اعداد شامل ہیں۔ اس لیے اس نظام میں تفریق کا عمل ہمیشہ ممکن ہے۔ مثلاً لا + 3 = 1 کا حل لا = −2 ہے جو کہ ایک صحیح عدد ہے۔ اسی طرح لا + 2 = 2 کا حل لا = 0 ہے اور صفر صحیح اعداد کے سیٹ کا رُکن ہے۔ لیکن تقسیم کا عمل صحیح اعداد کے سیٹ میں بھی ہمیشہ ممکن نہیں۔ کیونکہ صحیح اعداد کے ضربی معکوس عموماً صحیح اعداد نہیں ہوتے۔ مثال کے طور پر 3 لا = 1 کا حل صحیح اعداد کے سیٹ میں موجود نہیں۔ پس صحیح اعداد کا نظام بھی حسابی ضروریات کو پورا نہیں کر سکتا۔ چنانچہ ناطق اعداد کا نظام ایجاد ہوا۔

1.6 ناطق اعداد

ہر وہ عدد ناطق عدد ہے جسے $\frac{ا}{ب}$ کی صورت میں ظاہر کیا جا سکے جبکہ ا اور ب صحیح اعداد ہیں اور ب $\neq 0$

مثلاً $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$، $\frac{5}{1}$ ناطق اعداد ہیں۔ آپ غور سے دیکھیں تو پتہ چلتا ہے کہ ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے کیونکہ اسے $\frac{ا}{ب}$ کی صورت میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ ، $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$

$-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = \ldots$ ، $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$ وغیرہ

چونکہ ناطق اعداد کا سیٹ تمام صحیح اعداد اور کسری اعداد پر مشتمل ہے لہٰذا ناطق اعداد کے سیٹ پر وہ تمام عوامل کیے جا سکتے ہیں۔ جو کہ کسورِ عام کے سیٹ پر ہو سکیں۔ اب ہم ناطق اعداد کے خواص کا بغور مطالعہ کریں گے اور دیکھیں گے کہ وہ کس لحاظ سے صحیح اعداد کے خواص سے مختلف ہیں۔

1.7 ناطق اعداد کے نظام کے خواص

1- خاصیتِ بندش بلحاظ جمع :

دو ناطق اعداد ا اور ب کا مجموعہ ا + ب بھی ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثالیں : (i) $\frac{3}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}$

(ii) $\frac{7}{4} = \frac{3}{4} + 1$

(iii) $\frac{13}{12} = \frac{7}{4} + \frac{2}{3}-$

2- خاصیتِ مبادلہ بلحاظ جمع :

دو ناطق اعداد ا اور ب کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جائے تو حاصلِ جمع یکساں ہوگا یعنی ا + ب = ب + ا

مثالیں : (i) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3} = \frac{11}{15} = \frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

(ii) $\left[\left(\frac{5}{7} -\right)+\frac{17}{14}\right] = \frac{7}{14} = \frac{17}{14}+\frac{5}{7}-$

3- خاصیتِ تلازم بلحاظ جمع :

اگر ا ، ب ، ج تین ناطق اعداد ہوں تو (ا + ب) + ج = ا + (ب + ج)

مثال : $\frac{7}{9} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right)$

اور $\frac{7}{9} = \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{9}$

پس $\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right)$

4- جمعی ذاتی عنصر کا وجود:

ناطق اعداد کے سیٹ میں ایک رکن '0' ایسا موجود ہے کہ اگر اسے کسی ناطق عدد میں جمع کریں تو حاصل جمع وہی عدد ہوگا۔ '0' کو ناطق اعداد کے سیٹ کا جمعی ذاتی عنصر کہتے ہیں۔

مثال: $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$

5- جمعی معکوس کا وجود:

ہر ناطق عدد ا کے لیے ایک ایسا ناطق عدد -ا موجود ہے کہ

$$\text{ا} + (\text{ا}-) = 0 = (\text{ا}-) + \text{ا}$$

یہاں ا اور -ا ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثال: چونکہ $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 = \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}$ اس لیے $\frac{3}{4}$ اور $-\frac{3}{4}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

6- خاصیتِ بندش بلحاظ ضرب:

دو ناطق اعداد ا اور ب کا حاصل ضرب ا × ب (یا مختصراً اب) بھی ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثالیں:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$$

$$0 = \frac{0}{3} = \frac{0 \times 2}{3} = 0 \times \frac{2}{3}$$

7- خاصیتِ مبادلہ بلحاظ ضرب :

دو ناطق اعداد ا اور ب کو کسی بھی ترتیب سے ضرب دی جائے تو حاصلِ ضرب یکساں ہوگا- یعنی ا ب = ب ا

مثال: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

8- خاصیتِ تلازم بلحاظ ضرب :

اگر ا ، ب ، ج تین ناطق اعداد ہوں تو ا × (ب × ج) = (ا × ب) × ج

مثال: $\frac{1}{24} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2}$

اور $\frac{1}{24} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right)$

پس $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2}$

9- ضربی ذاتی عنصر کا وجود :

ناطق اعداد کے سیٹ میں ایک عدد '1' ایسا موجود ہے کہ اگر اُسے کسی ناطق عدد سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب وہی عدد ہوگا- 1 کو ناطق اعداد کے سیٹ کا ضربی ذاتی عنصر کہتے ہیں -

مثالیں : $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} = 1 \times \frac{3}{4}$

$1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 1$

$\frac{3-}{5} \times 1 = \frac{3-}{5} = 1 \times \frac{3-}{5}$

10- ضربی معکوس کا وجود :

ہر غیر صفر ناطق عدد ا کے لیے ایک ناطق عدد $\frac{1}{ا}$ موجود ہے جبکہ

$ا \times \frac{1}{ا} = 1 = \frac{1}{ا} \times ا$

اس میں ا اور $\frac{1}{ا}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں ۔

مثال : چونکہ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1 = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$

اس لیے $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{2}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں ۔

نوٹ : اگرچہ صفر ناطق عدد ہے لیکن اس کے ضربی معکوس کا وجود نہیں ۔ کیونکہ ایسا کوئی ناطق عدد موجود نہیں جسے صفر سے ضرب دیں تو حاصلِ ضرب ایک ہو ۔

11- ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع :

اگر ا ، ب ، ج کوئی سے تین ناطق اعداد ہوں تو

(i) ا × (ب + ج) = ا × ب + ا × ج

(ii) (ب + ج) × ا = ب × ا + ج × ا

مثال : $\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{2}$

اور $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right)$

پس $\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{2}$

یاد رہے کہ جمع کا عمل ضرب کے عمل پر تقسیمی خاصیت نہیں رکھتا ۔

یعنی ا + (ب × ج) ≠ (ا + ب) × (ا + ج)

مثال : $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \neq \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}$

کیونکہ $\frac{11}{16} = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}$

اور $\frac{15}{16} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$

اس لیے $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \neq \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}$

مشق 1.3

سوالات 1 تا 3 کے جوابات دلیل یا مثال کے ساتھ واضح کیجیے ۔

(1) کیا 3- ناطق اعداد کے سیٹ کا رکن ہے ؟

(2) کیا $\frac{1}{0}$ ناطق عدد ہے ؟

(3) کیا ہر صحیح عدد کو ناطق عدد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے ؟

(4) 0، 1، 5، 7- کو ناطق اعداد کی صورت میں لکھیے ۔

(5) ذیل میں دیے گئے ہر ناطق عدد کو تین مترادف کسور کی شکل میں لکھیے ۔

1، 2، 5، 3-

مندرجہ ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کیجیے ۔ اگر کسی مساوات کا حل ممکن نہ ہو تو وجہ بتائیے :

(6) ما+2 = 2 جبکہ ما ایک قدرتی عدد ہے ۔

(7) 2+ما = 0 جبکہ ما ایک مکمل عدد ہے ۔

(8) لا+5 = 3 جبکہ لا ایک صحیح عدد ہے ۔

(9) 3لا = 2 جبکہ لا ایک صحیح عدد ہے ۔

(10) 4لا = 1 جبکہ لا ایک ناطق عدد ہے ۔

(11) 2لا = 0 جبکہ لا ایک ناطق عدد ہے ۔

(12) اگر N، I اور Q بالترتیب قدرتی اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے سیٹوں کو ظاہر کرتے ہوں تو بتائیے سیٹ N اور I سیٹ Q کے کن خواص پر پُورے اُترتے ہیں اور کن خواص پر پُورے نہیں اُترتے ۔ جواب کی وضاحت مثالوں سے کیجیے ۔

(13) کیا قدرتی اعداد کا سیٹ بلحاظ تفریق خاصیتِ بندش رکھتا ہے ؟

(14) N، I اور Q میں سے کون سے سیٹ بلحاظ تفریق خاصیتِ بندش رکھتے ہیں ؟

(15) کیا صحیح اعداد کا سیٹ خاصیتِ بندش بلحاظ تقسیم رکھتا ہے ؟ جواب کی وضاحت مثال سے کیجیے ۔

(16) N، I اور Q میں سے کون سے سیٹ بلحاظ تقسیم خاصیتِ بندش رکھتے ہیں ؟

★ (17) ناطق اعداد کے نظام کی وہ خاصیت بتائیے جو N، Z اور I میں موجود نہیں ۔

(18) ایک لڑکے نے 4 کا ضربی معکوس $\frac{1}{4}$، 2- کا ضربی معکوس $\frac{1}{2}$ اور 0 کا ضربی معکوس $\frac{1}{0}$ لکھا۔ کیا اُس کا جواب درست ہے؟ اگر نہیں تو وجہ بتائیے ۔

مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے بیانات صحیح اور کون سے غلط ہیں ؟

(19) ہر قدرتی عدد صحیح عدد ہے ۔

(20) ہر صحیح عدد قدرتی عدد بھی ہے ۔

(21) ہر صحیح عدد ناطق عدد ہے ۔

(22) ہر ناطق عدد صحیح عدد بھی ہے ۔

(23) ناطق اعداد کا سیٹ صحیح اعداد ، مثبت کسری اعداد اور منفی کسری اعداد پر مشتمل ہے۔

اگر N، Z، I اور Q بالترتیب قدرتی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے سیٹ کو ظاہر کرتے ہوں تو مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے صحیح اور کون سے غلط ہیں ؟

(24) $I \supset N$

(25) $Q \supset I$

(26) $Q \supset I \supset N$

(27) N، Z اور Q کا فوقی سیٹ I ہے ۔

(28) N اور I کا فوقی سیٹ Q ہے ۔

★ نوٹ : Z = تمام مکمل اعداد کا سیٹ

باب 2

غیر اعشاری عددی نظام

2.1 اعشاری نظام

اعداد کے جس نظام سے آپ واقف ہیں، اسے "اعداد کا اعشاری نظام" کہتے ہیں۔ اس نظام میں بنیادی عددی علامتیں (جنھیں ہندسے کہتے ہیں) تعداد میں دس ہیں۔ یہ ہندسے مندرجہ ذیل ہیں :

0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9

اعداد صفر تا نَو کو ان بنیادی عددی علامتوں یا ہندسوں سے ظاہر کرتے ہیں۔ جو قدرتی اعداد نَو سے بڑے اور سَو سے چھوٹے ہوں، انھیں ظاہر کرنے والی عددی علامتیں دو دو ہندسوں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اسی طرح ننانوے سے بڑے اور ہزار سے چھوٹے قدرتی اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے تین تین ہندسوں والی عددی علامتیں استعمال ہوتی ہیں۔ وغیرہ وغیرہ۔

اب آپ مندرجہ ذیل مساواتوں پر غور کریں۔

$$10^1 \times 2+5 = 10\times 2+5 = 20+5 = 25$$

$$10^2 \times 4+10^1 \times 2+5 = 100\times 4+10\times 2+5 = 400+20+5 = 425$$

$$6000+400+20+5 = 6425$$

$$10^3 \times 6+10^2 \times 4+10^1 \times 2+5 = 1000\times 6+100\times 4+10\times 2+5 =$$

نوٹ : 6425 کو مطلوبہ شکل میں لکھنے کا طریقہ مندرجہ ذیل ہے۔

10	6425
10	642 – 5
10	64 – 2
	6 – 4

پس $6425 = 10^3 \times 6 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 2 + 5$

25 دراصل $10^1 \times 2 + 5$ کی مختصر شکل ہے۔

425 دراصل $10^2 \times 4 + 10^1 \times 2 + 5$ کی مختصر شکل ہے۔ جبکہ

6425 دراصل $10^3 \times 6 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 2 + 5$ کی مختصر شکل ہے۔

آپ دیکھ رہے ہیں کہ اوپر دی گئی مثالوں میں، ہر عدد کو 10 کی طاقتوں کے استعمال کی مدد سے ظاہر کیا گیا ہے، لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ دس (بمعنی عشر) "اعداد کے اعشاری نظام" کی اساس (بنیاد) ہے۔ باور کیا جاتا ہے کہ اس نظام کا رواج پانا محض اتفاقی ہے، کیونکہ انسان کے ہاتھ میں دس انگلیاں ہوتی ہیں اور پُرانے وقتوں کے لوگ گنتی کرنے کے لیے انگلیاں استعمال کرتے تھے۔

قدیم زمانے میں دُنیا کے کئی ملکوں میں ایسے عددی نظام رائج رہے ہیں، جن کی اساسیں دس سے مختلف تھیں۔ آپ جانتے ہیں کہ گھڑی کے ڈائل پر گھنٹوں کو ظاہر کرنے والے نشانات تعداد میں بارہ ہوتے ہیں۔ لہٰذا گھنٹوں کو ظاہر کرنے والی سوئی اساس بارہ کے نظام کے تحت چلتی ہے۔ کمپیوٹر کی ایجاد کے بعد ریاضی دانوں نے ان نظاموں میں دوبارہ دلچسپی لینا شروع کر دیا ہے۔ کمپیوٹر میں جو عددی نظام استعمال ہوتا ہے اُس کی اساس "دو" ہوتی ہے۔

ہم یہاں آپ کا تعارف اساس "پانچ" اور اساس "دو" کے عددی نظاموں سے کرائیں گے۔

2·2 اساس پانچ کا نظام

اساس پانچ کے نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے صرف پانچ ہندسوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہم انھیں 0، 1، 2، 3، 4 سے ظاہر کریں گے۔ (واضح رہے کہ ان ہندسوں کے لیے ہم کوئی اور علامات بھی وضع کر سکتے ہیں)۔

مختلف اساسوں میں فرق واضح رکھنے کی خاطر ہم ہر عددی علامت کے ساتھ متعلقہ اساس لکھ دیں گے۔ مثلاً $(\cdots\cdot)_{10}$ کا مطلب ہے کہ بریکٹ میں دیا ہوا عدد اساس دس کے نظام کے لحاظ سے لکھا گیا ہے۔ اسی طرح $(\cdots)_5$ اور $(\cdots)_2$ سے مراد یہ ہے کہ متعلقہ اعداد کو بالترتیب اساس "پانچ" اور اساس "دو" کے لحاظ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم کسی بھی دیے ہوئے عدد کو ایک اساس سے دوسری اساس میں تحویل کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ اعشاری نظام کے کسی عدد کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کرنے کے لیے اس کو '5' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لکھتے ہیں۔ (جیسا کہ اس باب کے شروع میں ہم نے اعشاری نظام کے اعداد کو '10' کی طاقتوں کے مجموعے کے طور پر لکھ کر دکھایا ہے)۔ اس مقصد کے لیے ہم اعشاری نظام میں دیے ہوئے عدد کو یکے بعد دیگرے '5' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 5 سے کم رہ جاتا ہے۔ وضاحت حل شدہ مثالوں سے کی جا رہی ہے۔

مثال 1: $(9)_{10}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

5	9
	1 – 4 ←

پس $(9)_{10} = 5 \times 1 + 4 = (14)_5$

نوٹ: چونکہ اساس پانچ کے نظام میں ہندسہ 5 نہیں ہوتا، لہٰذا ہمیں $(---)_5$ کی بجائے $(---)$ پانچ لکھنا چاہیے۔ ہم صرف سہولت کی خاطر $(---)_5$ لکھ رہے ہیں۔ اسی طرح $(----)$ دو کو $(----)_2$ لکھا جائے گا۔

مثال 2: $(17)_{10}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

5	17
	3 - 2 ←

پس $(32)_5 = 5\times3+2 = (17)_{10}$

نوٹ: واضح رہے کہ ہم $(14)_5$ کو "ایک چار اساس پانچ" پڑھیں گے۔

مثال 3: $(58)_{10}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

5	58
5	11 − 3 ↓
	2 − 1 ←

پس $(213)_5 = 5^2\times2+5\times1+3 = (58)_{10}$

مثال 4: $(460)_{10}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

5	460
5	92 − 0 ↓
5	18 − 2 ↓
	3 − 3 ←

پس $(3320)_5 = 5^3\times3+5^2\times3+5\times2+0 = (460)_{10}$

مثال 5 : $(9107)_{10}$ کو اساس پانچ کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل :

5	9107
5	1821 − 2 *
5	364 − 1
5	72 − 4
5	14 − 2
	2 − 4

پس $(9107)_{10} = (242412)_5$

نوٹ : اساس پانچ کا مطلوبہ عدد لکھنے کے لیے دائیں طرف سے پہلے مقام پر پہلا باقی (یعنی نشان زدہ "2") لکھیں۔ اُس کے بعد تیروں کے رُخ کے مطابق بالترّتیب دیگر اعداد لکھتے جائیں۔

مندرجہ ذیل حل شدہ مثالوں میں اساس پانچ کے اعداد کو اساس دس کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کے طریقہ کی وضاحت کی جا رہی ہے۔ آسانی کی خاطر ہم اساس دس کے اعداد کے ساتھ اساس نہیں لکھیں گے۔

مثلاً : $(8)_{10}$، $(47)_{10}$، $(519)_{10}$ . . . . کو محض 8، 47، 519 . . . لکھیں گے۔

مثال 6 : $(14)_5$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل : $(14)_5 = 5\times1+4 = 5+4 = 9$

مثال 7 : $(43)_5$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل : $(43)_5 = 5\times4+3 = 20+3 = 23$

مثال 8 : $(301)_5$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل : $(301)_5 = 5^2\times3+5\times0+1 = 25\times3+0+1$

$= 75+0+1 = 76$

مثال 9: $(4213)_5$ کو اساس دس کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

$$(4213)_5 = 5^3 \times 4 + 5^2 \times 2 + 5 \times 1 + 3$$

$$= 125 \times 4 + 25 \times 2 + 5 + 3$$

$$= 500 + 50 + 8 = 558$$

2.3 ثنائی نظام

ہم پہلے ہی بتا چکے ہیں کہ کمپیوٹر میں اساس دو کا نظام استعمال ہوتا ہے۔ کیونکہ کمپیوٹر بجلی سے چلتا ہے اور برقی رَو یا تو اوف (Off) ہوتی ہے یا اون (On)۔ پس کمپیوٹر میں '0' کو اوف اور '1' کو اون کے مطابق لیا جاتا ہے۔

اس نظام کی موجُودہ دَور میں بہت اہمیت ہے۔

اساس دو کے نظام کا دوسرا نام "ثنائی نظام" ہے۔

واضح رہے کہ ہم ثنائی نظام میں علامات یا ہندسوں کو 0، 1 کی بجائے دیگر علامات سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم صفر کو ⊙ سے اور ایک کو ☐ سے ظاہر کریں تو دس تک اعداد کو ثنائی نظام میں مندرجہ ذیل علامات سے ظاہر کیا جائے گا۔

عدد	علامات
صفر	⊙
ایک	☐
دو	☐ ⊙
تین	☐ ☐
چار	☐ ⊙ ⊙
پانچ	☐ ⊙ ☐
چھ	☐ ☐ ⊙
سات	☐ ☐ ☐
آٹھ	☐ ⊙ ⊙ ⊙
نَو	☐ ⊙ ⊙ ☐
دس	☐ ⊙ ☐ ⊙

ذیل میں ہم اعشاری نظام کے اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد اور ثنائی نظام کے اعداد کو اعشاری نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کرنے کی وضاحت حل شدہ مثالوں سے کر رہے ہیں۔ یاد رہے کہ اعشاری عدد کو ثنائی عدد میں تحویل کرنے کے لیے اعشاری عدد کو بار بار '2' پر تقسیم کرتے جاتے ہیں حتیٰ کہ خارج قسمت 2 سے کم رہ جاتا ہے۔

نوٹ: اعشاری عدد سے مراد اعشاری نظام کا عدد اور ثنائی عدد سے مراد ثنائی نظام کا عدد ہے۔

مثال 1: $(9)_{10}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

2	9
2	4 − 1
2	2 − 0
	1 − 0

پس $(9)_{10} = 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2 \times 0 + 1 = (1001)$

مثال 2: $(17)_{10}$ کو اساس دو کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

2	17
2	8 − 1
2	4 − 0
2	2 − 0
	1 − 0

پس $(17)_{10} = 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 0 + 1 = (10001)_2$

مثال 3: $(460)_{10}$ کو مترادف ثنائی عدد میں تحویل کریں۔

حل:

2	460
2	230 − 0
2	115 − 0
2	57 − 1
2	28 − 1
2	14 − 0
2	7 − 0
2	3 − 1
2	3 − 1
	1 − 1

پس $(460)_{10} = 2^8\times1+2^7\times1+2^6\times1+2^5\times0+2^4\times0+2^3\times1+2^2\times1+2\times0+0$

$= (111001100)_2$

مثال 4: $(743)_{10}$ کو ثنائی نظام کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

2	743
2	371 − 1
2	185 − 1
2	92 − 1
2	46 − 0
2	23 − 0
2	11 − 1
2	5 − 1
2	2 − 1
	1 − 0

پس $(743)_{10} = (1011100111)_2$

مثال 5 : $(1001)_2$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کریں ۔

حل : $9 = 8+0+0+1 = 2^3\times1+2^2\times0+2\times0+1 = (1001)_2$

مثال 6 : $(11110001)_2$ کو مترادف اعشاری عدد میں تحویل کریں ۔

حل : $\times1+2^6\times1+2^5\times1+2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2\times0+1 = (11110001)_2$

$241 = 128+64+32+16+0+0+0+1 =$

اب ہم دس تک اعداد کو اساس پانچ اور اساس دو کے نظاموں میں علامات سے ظاہر کر کے دکھائیں گے ۔

عدد	اساس پانچ کے نظام میں علامت	اساس دو کے نظام میں علامت
صفر	0	0
ایک	1	1
دو	2	10
تین	3	11
چار	4	100
پانچ	10	101
چھ	11	110
سات	12	111
آٹھ	13	1000
نو	14	1001
دس	20	1010

مشق 2.1

(1) مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو اساس پانچ کے مترادف اعداد میں تحویل کریں۔

(I)	8	(II)	15	(III)	67
(IV)	109	(V)	287	(VI)	888
(VII)	1234	(VIII)	5000	(IX)	9083

(2) مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کریں۔

(I)	5	(II)	7	(III)	19
(IV)	30	(V)	89	(VI)	100
(VII)	158	(VIII)	666	(IX)	1023

(3) مندرجہ ذیل اعداد کو مترادف اعشاری اعداد میں تحویل کریں۔

(I)	$(24)_5$	(II)	$(30)_5$	(III)	$(124)_5$
(IV)	$(10)_2$	(V)	$(101)_2$	(VI)	$(100000)_2$
(VII)	$(444)_5$	(VIII)	$(30000)_5$	(IX)	$(432100)_5$
(X)	$(10101010)_2$	(XI)	$(1000000000)_2$	(XII)	$(11111111111)_2$

2.4 اساس پانچ کے نظام میں جمع، تفریق

دفعہ 2.2 میں بتایا جا چکا ہے کہ اساس پانچ کے نظام میں صرف پانچ ہندسے یعنی 0، 1، 2، 3، 4 استعمال ہوتے ہیں۔ اس نظام میں پانچ اور پانچ سے بڑے اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے جو عددی علامتیں استعمال ہوتی ہیں، اُن میں دو یا دو سے زیادہ ہندسے استعمال ہوتے ہیں۔ پس اساس پانچ کے نظام میں اگر دو اعداد کا مجموعہ پانچ یا پانچ سے زیادہ ہو تو یہ 'جمع با حاصل' ہوگی۔

مثالیں: (i) چونکہ دو اور چار کا مجموعہ چھے ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد چھے کو علامت '11' سے ظاہر کرتے ہیں ، لہٰذا

$$(4)_5 + (2)_5 = (11)_5 \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} (2)_5 \\ (4)_5 + \\ \hline (11)_5 \end{array}$$

(ii) چونکہ چار اور چار کا مجموعہ آٹھ ہوتا ہے اور اساس پانچ کے نظام میں عدد آٹھ کو علامت '13' سے ظاہر کرتے ہیں ، لہٰذا

$$(4)_5 + (4)_5 = (13)_5 \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} (4)_5 \\ (4)_5 + \\ \hline (13)_5 \end{array}$$

آپ کی سہولت کی خاطر ہم نیچے اساس پانچ کے نظام میں جمع کی جدول دے رہے ہیں ۔ اسے استعمال کر کے آپ بآسانی اس نظام میں اعداد کو جمع کر سکتے ہیں ۔

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی جدول

4	3	2	1	0	+
4	3	2	1	0	0
10	4	3	2	1	1
11	10	4	3	2	2
12	11	10	4	3	3
13	12	11	10	4	4

اساس پانچ کے نظام میں جمع کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے ۔

مثال 1: $(124)_5$ اور $(302)_5$ کو جمع کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ (124)_5 \\ (302)_5 + \\ \hline (431)_5 \end{array}$$

پس $(431)_5 = (302)_5 + (124)_5$

مثال 2: $(4141)_5 + (3321)_5$ کو حل کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ (4\ 1\ 4\ 1)_5 \\ (3\ 3\ 2\ 1)_5 + \\ \hline (1\ 3\ 0\ 1\ 2)_5 \end{array}$$

پس $(13012)_5 = (3321)_5 + (4141)_5$

واضح رہے کہ ان مثالوں میں ① حاصل بلحاظ پانچ ہے۔

اب ہم اساس پانچ کے نظام میں تفریق کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کریں گے۔

مثال 3: $(431)_5$ سے $(124)_5$ تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} \textcircled{2}\textcircled{11} \\ (4\ 3\ 1)_5 \\ (1\ 2\ 4)_5 - \\ \hline (3\ 0\ 2)_5 \end{array}$$

پس $(302)_5 = (124)_5 - (431)_5$

وضاحت: دائیں طرف سے پہلے کالم میں ہم عدد ایک سے عدد چار تفریق کرنا چاہتے ہیں جو کہ ممکن نہیں ہے، لہٰذا دوسرے کالم میں 3 میں سے 1 حاصل لیا تو وہاں باقی 2 رہ گیا جبکہ پہلے کالم میں '11' بن گیا۔ آپ کو معلوم ہے کہ اساس پانچ کے نظام میں علامت '11' عدد چھے کو ظاہر کرتی ہے۔ پس اب ہم پہلے کالم میں عدد چھے سے عدد چار تفریق کریں گے، تو حاصلِ تفریق عدد 'دو' ہوگا، جسے علامت '2' سے ظاہر کرتے ہیں۔ تفریق کا باقی عمل واضح ہے۔

مثال 4 : $(13012)_5 - (4141)_5$ کو حل کریں۔

حل :

$$\begin{array}{rrrrr} & \textcircled{12} & \textcircled{4} & \textcircled{11} & \\ (1 & 3 & 0 & 1 & 2)_5 \\ & (4 & 1 & 4 & 1)_5 - \\ \hline & (3 & 3 & 2 & 1)_5 \end{array}$$

پس $(13012)_5 - (4141)_5 = (3321)_5$

وضاحت : (i) پہلے کالم میں تفریق کا عمل واضح ہے۔

(ii) دوسرے کالم میں چونکہ عدد 'ایک' سے عدد 'چار' تفریق نہیں ہو سکتا، لہٰذا تیسرے کالم میں '1' حاصل لینا پڑے گا۔ تیسرے کالم میں چونکہ '0' ہے، لہٰذا پہلے ہم نے چوتھے کالم سے تیسرے کالم کے لیے '1' حاصل لیا تو چوتھے کالم میں باقی '2' رہ گیا۔ جبکہ تیسرے کالم میں '10' بن گیا۔ اساس پانچ کے نظام میں '10' عدد پانچ کو ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے جب تیسرے کالم میں عدد پانچ سے دوسرے کالم کے لیے '1' حاصل لیا تو تیسرے کالم میں باقی '4' رہ گیا جبکہ دوسرے کالم میں '11' بن گیا۔ اب $(11)_5$ ظاہر کرتا ہے عدد چھے کو۔ پس دوسرے کالم میں عدد چھے سے عدد چار تفریق کیا تو ان دونوں اعداد کا فرق '2' آیا جو کہ لکیر کے نیچے دوسرے کالم میں درج کر دیا۔

(iii) تفریق کا باقی عمل بھی اسی طرح کیا گیا ہے۔

2.5 ثنائی نظام میں جمع، تفریق

ثنائی نظام میں جمع اور تفریق کے عوامل، بالکل اساس پانچ کے نظام میں جمع اور تفریق کے عوامل کی طرح ہیں۔ فرق صرف یہ ہے کہ ثنائی نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے صرف دو ہندسے 0، 1 استعمال ہوتے ہیں۔

آپ کی سہولت کی خاطر نیچے ثنائی نظام میں جمع کی جدول دی گئی ہے ۔

ثنائی نظام میں جمع کی جدول

1	0	+
1	0	0
10	1	1

ثنائی نظام میں جمع اور تفریق کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے ۔

مثال 1 : $(10)_2$ اور $(11)_2$ کو جمع کریں ۔

حل :

$$\begin{array}{r} (10)_2 \\ (11)_2 + \\ \hline (101)_2 \end{array}$$

پس $(101)_2 = (11)_2 + (10)_2$

مثال 2 : $(110001)_2$ اور $(10111101)_2$ کو جمع کریں ۔

حل :

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1}\quad\ \textcircled{1}\quad \\ (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)_2 \\ (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)_2 + \\ \hline (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)_2 \end{array}$$

پس $(11101110)_2 = (10111101)_2 + (110001)_2$

مثال 3 : $(1010)_2$ سے $(1000)_2$ کو تفریق کریں ۔

حل :

$$\begin{array}{r} (1010)_2 \\ (1000)_2 - \\ \hline (10)_2 \end{array}$$

پس $(10)_2 = (1000)_2 - (1010)_2$

مثال 4 : $(100011111)_2$ اور $(1111110011)_2$ کا فرق معلوم کریں۔

حل : چونکہ $(1111110011)_2$ بڑا ہے $(100011111)_2$ سے۔ پس فرق مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$\begin{array}{rcccccccccl} & & & & & & ⓪ & ⑩ & ① & ⑩ & \\ (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1)_2 & \\ (& 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1)_2 & - \\ \hline (1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0)_2 & \end{array}$$

اس لیے $(100011111)_2$ اور $(1111110011)_2$ کا فرق $= (1011010100)_2$

مشق 2.2

حاصل جمع معلوم کریں :

(1) $(4)_5 + (3)_5$ (2) $(2)_5 + (1)_5$

(3) $(23)_5 + (12)_5$ (4) $(40)_5 + (24)_5$

(5) $(103)_5 + (214)_5$ (6) $(444)_5 + (444)_5$

(7) $(222)_5 + (333)_5$ (8) $(102)_5 + (4123)_5$

(9) $(4210)_5 + (1234)_5$ (10) $(3333)_5 + (4003)_5$

حاصل تفریق معلوم کریں :

(11) $(1)_5 - (4)_5$ (12) $(12)_5 - (23)_5$

(13) $(34)_5 - (43)_5$ (14) $(42)_5 - (124)_5$

(15) $(104)_5 - (241)_5$ (16) $(334)_5 - (443)_5$

(17) $(444)_5 - (401)_5$ (18) $(1201)_5 - (1403)_5$

(19) $(2222)_5 - (1203)_5$ (20) $(3333)_5 - (4000)_5$

مندرجہ ذیل کو حل کریں :

(21) $(11)_2 + (100)_2$ (22) $(111)_2 + (101)_2$

(23) $(1110)_2 + (10111)_2$ (24) $(11101111)_2 + (1000111)_2$

(25) $(11)_2 - (100)_2$ (26) $(1001)_2 - (1011)_2$

(27) $(10011)_2 - (10000)_2$ (28) $(1111111)_2 - (11110101)_2$

(29) $(1100000)_2 - (1000000)_2$ (30) $(111111)_2 - (100000)_2$

مندرجہ ذیل کو حل کریں :

(31) $(44)_5 - (23)_5 + (14)_5$ (32) $\{(34)_5 - (13)_5\} - (22)_5$

(33) $[\{(133)_5 - (24)_5\} - (103)_5] + (210)_5$

(34) $[\{(122)_5 + (244)_5\} + (424)_5] - (123)_5$

اساس دس کے نظام میں تحویل کر کے حل کریں :

(35) $(11)_5 - (10)_2 + (12)_5$

(36) $\{(23)_5 + (101)_2\} - (44)_5$

(37) $\{(1122)_5 + (10001)_2\} + (311)_5$

(38) $(1011)_2 + (41)_5 + (19)_{10}$

(39) $(100011)_2 + (2140)_5 - (487)_{10}$

(40) $(24110)_5 - (101111)_2 - (9873)_{10}$

2.6 اساس پانچ اور دو کے نظاموں میں ضرب :

نچلی جماعتوں میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ضرب درحقیقت کسی عدد کو بار بار جمع کرنے کا دوسرا نام ہے ۔ چنانچہ اساس پانچ اور دو کے نظاموں میں بھی ضرب کا عمل ، جمع کے عمل ہی سے اخذ کیا جاتا ہے ۔ آپ کو معلوم ہے کہ اعشاری نظام

میں ضرب کے عمل میں سہولت کی خاطر ضرب کی جدولیں (پہاڑے) یاد کرنا ضروری ہوتی ہیں ۔ دیگر نظاموں میں بھی ضرب کے عمل میں آسانی کی خاطر پہاڑے یاد کرنا ضروری ہیں ۔ ذیل میں اساس پانچ اور دو کے نظاموں کے لیے ضرب کی جدولیں دی گئی ہیں ۔

اساس پانچ کے نظام میں ضرب کی جدول

4	3	2	1	0	×
0	0	0	0	0	0
4	3	2	1	0	1
13	11	4	2	0	2
22	14	11	3	0	3
31	22	13	4	0	4

ثنائی نظام میں ضرب کی جدول

1	0	×
0	0	0
1	0	1

ضرب کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے :

مثال 1 : $(3)_5$ اور $(2)_5$ کو ضرب دیں ۔

حل : اعداد تین اور دو کا حاصلِ ضرب چھے ہوتا ہے ۔
چھے میں 1 اکائی اور 1 پانچ ہوتا ہے ، لہٰذا

$$(11)_5 = (2)_5 \times (3)_5$$

مثال 2 : $(14)_5$ اور $(3)_5$ کا حاصلِ ضرب معلوم کریں ۔

حل :

$$\begin{array}{r} (14)_5 \\ (3)_5 \times \\ \hline (102)_5 \end{array}$$

وضاحت : اعداد چار اور تین کا حاصلِ ضرب بارہ ہوتا ہے ۔ بارہ میں 2 اکائیاں اور 2 پانچ ہوتے ہیں ، پس، اساس پانچ کے نظام میں عدد بارہ کو '22' سے ظاہر کرتے ہیں۔

ضرب کا باقی عمل بھی اسی طرح کیا گیا ہے ۔

پس $(102)_5 = (3)_5 \times (14)_5$

مثال 3 : $(231)_5$ اور $(34)_5$ کو ضرب دیں۔

حل :

$$\begin{array}{r} (231)_5 \\ (34)_5 \times \\ \hline 2024 \\ 1243 \\ \hline (20004)_5 \end{array}$$

پس $(231)_5 \times (34)_5 = (20004)_5$

نوٹ: مثال 3 میں ضرب کا عمل اساس پانچ کے نظام میں ضرب کی جدول کی مدد سے کیا گیا ہے۔

مثال 1 اور مثال 2 بھی اسی طرح حل کی جا سکتی ہیں۔

مثال 4 : $(1001)_2$ اور $(1011)_2$ کا حاصلِ ضرب معلوم کریں۔

حل :

$$\begin{array}{r} (1001)_2 \\ (1011)_2 \times \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ 0000 \\ 1001 \\ \hline (1100011)_2 \end{array}$$

مشق 2.3

حل کریں :

(1) $(2)_5 \times (4)_5$

(2) $(13)_5 \times (4)_5$

(3) $(42)_5 \times (24)_5$

(4) $(33)_5 \times (43)_5$

(5) $(14)_5 \times (120)_5$

(6) $(123)_5 \times (44)_5$

(7) $(403)_5 \times (243)_5$

(8) $(233)_5 \times (343)_5$

(9) $(11)_2 \times (10)_2$

(10) $(110)_2 \times (101)_2$

(11) $(1001)_2 \times (111)_2$

(12) $(1001)_2 \times (1101)_2$

(13) $(11110)_2 \times (11011)_2$

(14) $(10111)_2 \times (11001)_2$

(15) $(14)_5 \times (11)_2 \times (34)_5$

(16) $(111)_2 \times (124)_5 \times (101)_2$

(17) $(32)_5 \times (89)_{10} \times (110)_2$

(18) $(78)_{10} \times (122)_5 \times (1110)_2$

باب 3

جذرالمربّع

پچھلی جماعت میں آپ ایسے اعداد کا جذر بذریعہ اجزائے ضربی معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جو مثبت اعداد کے مکمل مربّع تھے۔ لیکن اگر اعداد مکمل مربّع نہ ہوں یا بہت بڑے ہوں تو ان کا جذر تقسیم کے قاعدے سے معلوم کرتے ہیں۔ جو آپ اب سیکھیں گے۔

3.1 مجذور اور جذر کے ہندسوں میں تعلّق:

مکمل مربّع عدد	عدد کا جذر	دلیل
1	1	کیونکہ $1 \times 1 = 1$
4	2	کیونکہ $2 \times 2 = 4$
9	3	کیونکہ $3 \times 3 = 9$
16	4	کیونکہ $4 \times 4 = 16$
49	7	کیونکہ $7 \times 7 = 49$
81	9	کیونکہ $9 \times 9 = 81$
100	10	کیونکہ $10 \times 10 = 100$
900	30	کیونکہ $30 \times 30 = 900$
1600	40	کیونکہ $40 \times 40 = 1600$
8100	90	کیونکہ $90 \times 90 = 8100$
10000	100	کیونکہ $100 \times 100 = 10000$
250000	500	کیونکہ $500 \times 500 = 250000$

اُوپر کے جدول میں چند مکمل مربّع اعداد کے جذر دیے گئے ہیں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہندسی اور دو ہندسی اعداد کا جذر ایک ہندسی عدد ہے۔ تین ہندسی اور چار ہندسی اعداد کا جذر دو ہندسی عدد ہے۔ پانچ ہندسی اور چھے ہندسی اعداد کا جذر تین

تین ہندسی عدد ہے۔

بتائیے سات ہندسی عدد کے جذر میں کتنے ہندسے ہوں گے؟ کیا آٹھ ہندسی عدد کے جذر میں چار ہندسے ہوں گے؟ کیا گیارہ ہندسی عدد کے جذر میں چھے ہندسے ہوں گے؟

مندرجہ بالا مثالوں سے یہ نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ اگر کسی مکمل مربع عدد کے ہندسوں کی تعداد جفت ہو تو اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد، عدد کے ہندسوں کی تعداد کا نصف ہوگی اور اگر مجذور کے ہندسوں کی تعداد طاق ہو تو جذر میں ہندسوں کی تعداد مجذور کے ہندسوں کی تعداد میں ایک جمع کر کے مجموعہ کا نصف لینے سے حاصل ہوگی۔ مثلاً:

اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد $=1$ تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $= \frac{1+1}{2} = 1$

اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد $=2$ تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $= \frac{2}{2} = 1$

اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد $=3$ تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $= \frac{1+3}{2} = 2$

اگر مجذور میں ہندسوں کی تعداد $=4$ تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $= \frac{4}{2} = 2$

3.2 مجذور کو وقفوں میں تقسیم کرنا:

فرض کیا ہمیں کسی مکمل مربع عدد کا جذر معلوم کرنا ہے۔ ہم اکائی کے ہندسے سے شروع کر کے دو، دو ہندسوں کے وقفے اس طرح قائم کریں گے کہ پہلے وقفہ میں اکائی اور دہائی کا جوڑا لیں، دوسرے وقفہ میں سینکڑا اور ہزار کا، تیسرے وقفہ میں دہ ہزار اور لاکھ کا۔ اور اس طرح جوڑے بناتے جائیں۔ اگر عدد کے آخر میں ایک ہندسہ رہ جائے تو اسے پورا وقفہ شمار کیا جائے۔ اس طرح مجذور کے جتنے وقفے قائم ہوں گے، اتنے ہی ہندسے اس کے جذر میں ہوں گے۔ مثلاً 1024 کے جذر میں دو ہندسے ہوں گے کیونکہ $\overline{10}\ \overline{24}$ میں دو وقفے بنتے ہیں۔ 361 کے جذر میں بھی دو ہندسے ہوں گے کیونکہ $\overline{3}\ \overline{61}$ میں دو وقفے بنتے ہیں۔

پڑتال: 1024 چار ہندسوں والا عدد ہے اس لیے اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد

$= \frac{4}{2} = 2$ ہوگی اور 361 میں تین ہندسے ہیں۔ اس لیے اس کے جذر میں

ہندسوں کی تعداد $= \frac{1+3}{2} = 2$ ہوگی۔

مشق 3.1

(1) ایک مکمل مربّع عدد کے ہندسوں کی تعداد 9 ہے۔ اس کے جذر میں کتنے ہندسے ہوں گے؟

(2) 12 ہندسوں والے مکمل مربّع عدد کے جذر میں کتنے ہندسے ہوں گے؟

(3) مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

مربّع عدد میں ہندسوں کی تعداد	5	6	8	9	12	13
جذر میں ہندسوں کی تعداد	3					
دلیل	$3 = \frac{1+5}{2}$					

مندرجہ ذیل مکمل مربّع اعداد کو وقفوں میں تقسیم کر کے ہر عدد کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے:

(4) 529 (5) 1156 (6) 3721 (7) 46656

(8) 96100 (9) 2455489 (10) 263169

3.3 مکمل مربّع صحیح اعداد کا جذر بذریعہ تقسیم:

تقسیم کے قاعدے سے جذر دریافت کرنے کے اصول کو سمجھنے کے لیے ہم الجبرا کے مندرجہ ذیل کلیہ سے مدد لیں گے:

$$(\text{ا} + \text{ب})^2 = \text{ا}^2 + 2\text{اب} + \text{ب}^2$$

$$= \text{ا}^2 + (2\text{ا} + \text{ب})\,\text{ب}$$

فرض کیا ہمیں 2916 کا جذر معلوم کرنا ہے۔ جذر معلوم کرنے کے لیے ہم پہلے اکائی کے ہندسہ سے شروع کر کے دو، دو ہندسوں کے وقفے قائم کریں گے اور فوراً یہ معلوم کرنا چاہیں گے کہ جذر کتنے ہندسوں کا عدد ہے۔

مثلاً 2916 کے جذر میں دو ہندسے ہوں گے۔ کیونکہ $\overline{29}\,\overline{16}$ کے دو وقفے قائم ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہمیں جذر میں دہائی کے ہندسے کا بھی اندازہ فوراً ہو جائے گا۔ کیونکہ $50^2 = 2500$ اور $60^2 = 3600$ اس لیے 2916 کا جذر 50 سے زیادہ اور 60 سے کم ہوگا۔ یعنی جواب 50 اور 60 کے درمیان کوئی عدد ہے۔

فرض کیا 2916 کا جذر = (50 + لا) جبکہ لا اکائی کا ہندسہ ہے۔

پس 2916 = $(50 + \text{لا})^2$

= 2500 + (2 × 50 + لا) لا

اس لیے 2916 − 2500 = (2 × 50 + لا) لا

اس لیے لا ایک ایسا ہندسہ ہے کہ اگر (2916 − 2500) یعنی 416 کو (2 × 50 + لا) پر تقسیم کریں تو جواب لا آئے گا۔ اس ہندسے کا اندازہ ہم 416 کو 2 × 50 پر تقسیم کر کے کر سکتے ہیں۔ 416 کو 100 پر تقسیم کریں یا 41 کو 10 پر تقسیم کریں تو 4 حاصل قسمت ملتا ہے۔ لا کو 4 کے مساوی لیا جائے تو اوپر کی مساوات صحیح ہوتی ہے۔ اس لیے جذر میں اکائی کا ہندسہ 4 ہے۔

پس جذر میں دہائی کا ہندسہ 5 اور اکائی کا ہندسہ 4 ہے۔

لہٰذا $\sqrt{2916} = 54$

یہ عمل اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

	50 + 4	
50	$\overline{29}\,\overline{16}$	
	2500	= 50 × 50 = ا^2
2 × 50 + 4	416	
	416	= 4 (4 + 50 × 2) = ب (2ا + ب)
	0	

پس $\sqrt{2916} = 50 + 4 = 54$

اختصار کے لیے اوپر کے عمل کو اس طرح لکھیں گے:

	5 4
5	$\overline{29}\,\overline{16}$
	25
104	416
	416
	0

تشریح: (i) 2916 میں دو وقفے ہیں۔ اس لیے مطلوبہ جذر میں دو ہندسے ہوں گے۔

(ii) آخری وقفہ جذر کے دہائی کے ہندسے کا تعین کرے گا۔ چنانچہ دہائی کا ہندسہ 5 ہے کیونکہ 29 پانچ کے مربع سے بڑا اور چھے کے مربع سے چھوٹا ہے۔

(iii) 29 میں سے 5 کا مربع 25 تفریق کیا تو باقی 4 بچا۔ 4 کے ساتھ اگلا جوڑا 16 ملا کر 416 حاصل کیا۔

(iv) 5 کا دگنا 10 لیا۔ 41 کو 10 پر تقسیم کرنے سے 4 حاصل قسمت ملا۔ 4 کو 10 کے دائیں ہاتھ لکھ کر 104 بنایا۔ کیونکہ $104 \times 4 = 416$ اس لیے اکائی کا ہندسہ 4 ہے۔

(v) 416 کو 104 پر تقسیم کر کے عمل مکمل کیا۔

پس $\sqrt{2916} = 54$

مثال: 9801 کا جذر تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کیجیے۔

مکمل عمل

	90 + 9	
90	$\overline{98}\,\overline{01}$	
	8100	جبکہ (ا = 90) .... ا^2 = 90 × 90 =
2 × 90 + 9	1701	
	1701	(2ا + ب) ب = (9 + 90 × 2) 9 =
	0	

مختصر عمل

	9 9
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
	81
189	1701
	1701
	0

پس $\sqrt{9801} = 99$

واضح رہے کہ 99 = 9 + 90 = ب + ا = ا + ب

مشق 3.2

(1) مندرجہ ذیل مکمل مربّع اعداد کے جذر میں کتنے ہندسے ہوں گے؟ جواب کے حق میں دلیل بھی دیجیے۔ (زبانی)

264196 ، 50625 ، 10000 ، 9604 ، 576

(2) سوال 1 میں دیے گئے، ہر عدد کے بائیں طرف کے آخری وقفہ کو دیکھ کر بتائیے کہ کس عدد کا مربّع اس وقفہ کے قریب تر ہے لیکن اس سے بڑا نہیں۔ (زبانی)

مندرجہ ذیل کا جذر تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کیجیے:

(3) 784 (4) 9604 (5) 5184 (6) 3249 (7) 8649

(8) 6561 (9) 4489 (10) 1936 (11) 289

3.4 دو سے زیادہ وقفوں والے مکمل مربّع اعداد کا جذر:

فرض کیا ہمیں تین وقفوں والے مکمل مربّع عدد کا جذر معلوم کرنا ہے۔ اس عمل کو سمجھنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل کلیہ کی مدد لیں گے:

$$(ا + ب + ج)^2 = (ا + ب)^2 + 2(ا + ب)ج + ج^2$$

$$= ا^2 + 2اب + ب^2 + 2اج + 2بج + ج^2$$

$$= ا^2 + \{2(ا + ب)ب\} + \{2(ا + ب) + ج\}ج$$

مثال 1 : 263169 کا جذر تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کیجیے۔

پورا عمل:

	500 + 10 + 3	
500	263169	
	250000	$500 \times 500 = ا^2$ ... (جبکہ ا = 500)
2 × 500 + 10	13169	
	10100	$= 10(10 + 500 \times 2) = ب \times (2ا + ب)$ ... (جبکہ ب = 10)
2 (500 + 10) + 3	3069	
	3069	$= 3\{3 + (10 + 500)2\} = ج\{ج + (ا + ب)2\}$ ... (جبکہ ج = 3)
	0	

پس $\sqrt{263169} = 513$

واضح رہے کہ 513 = 3 + 10 + 500 = ج + ب + ا = ا + ب + ج

مختصر عمل:

	5 1 3
	$\overline{26}\,\overline{31}\,\overline{69}$
5	25
	131
101	101
	3069
1023	3069
	0

پس $\sqrt{263169} = 513$

تشریح:

(i) عدد کے اکائی کے ہندسے سے شروع کر کے وقفے لگائے تو معلوم ہوا کہ جذر میں 3 ہندسے ہوں گے۔

(ii) بائیں طرف کا آخری وقفہ سینکڑے کے ہندسے کا تعین کرے گا۔ چنانچہ سینکڑے کا ہندسہ 5 ہے۔ کیونکہ 5 کا مربّع 26 کے قریب تر ہے اور اس سے زیادہ نہیں۔

(iii) 5 کے مربّع 25 کو 26 میں سے تفریق کیا تو باقی 1 بچا۔ 1 کے دائیں طرف اگلے وقفے کو لکھ کر 131 بنایا۔

(iv) 5 کا دُگنا 10 لیا۔ 13 کو 10 پر تقسیم کرنے سے حاصل قسمت 1 ملتا ہے۔ یہ جذر کا دہائی کا ہندسہ ہے۔ 1 کو 10 کے ساتھ ملا کر 101 بنایا۔

(v) 1 × 101 کو 131 میں سے تفریق کیا تو باقی 30 بچا۔

(vi) 30 کے دائیں طرف آخری جوڑا لکھ کر 3069 حاصل کیا۔

(vii) 51 کا دُگنا 102 لیا۔ 306 کو 102 پر تقسیم کرنے سے حاصل قسمت 3 آیا۔ جو جذر کا اکائی کا ہندسہ ہے۔

(viii) 3 کو 102 کے دائیں ہاتھ لکھ کر 1023 بنایا۔

(ix) 3 × 1023 کو 3069 میں سے تفریق کیا تو باقی صفر بچا۔ پس

عمل مکمل ہو گیا اور اس لیے

$513=\sqrt{263169}$

مثال 2 : 94249 کا جذر معلوم کیجیے۔

مکمل عمل :

	7 + صفر دہائی + 300	
300	$\overline{9}\,\overline{42}\,\overline{49}$	
	90000	$= 300 \times 300 =$ ا²
صفر دہائی + 300 × 2	4249	
	0	$= 0\,(0 + 300 \times 2) =$ ب(2ا + ب)
2 (300 + 0) + 7	4249	
	4249	$= 7\{7 + (0 + 300)\,2\} =$ ج{ج + (ا + ب)2}
	0	

اس لیے $307=\sqrt{94249}$

مختصر عمل :

	3 0 7
3	$\overline{9}\,\overline{42}\,\overline{49}$
	9
607	4249
	4249
	0

پس $307=\sqrt{94249}$

مثال 3 : 20164 کا جذر معلوم کیجیے۔

	1 4 2
1	$\overline{2}\,\overline{01}\,\overline{64}$
	1
24	101
	96
282	564
	564
	0

اس لیے $142=\sqrt{20164}$

مشق 3.3

مندرجہ ذیل اعداد کے جذر تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کیجیے اور مکمل عمل دکھائیے :

(1) 58081　　(2) 223729　　(3) 88209

(4) 10404　　(5) 376996　　(6) 66564

مندرجہ ذیل اعداد کے جذر تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کیجیے ۔ مختصر عمل دکھائیے :

(7) 99225　　(8) 141376　　(9) 52900　　(10) 43264

مندرجہ ذیل اعداد کے جذر معلوم کیجیے :

(11) 46656　　(12) 263169　　(13) 962361

(14) 657721　　(15) 21353641　　(16) 674041

(17) 10349089　　(18) 10201　　(19) 546121

(20) 133225　　(21) 547600　　(22) 162409

(23) 1058841　　(24) 5784025　　(25) 3904576

3.5 مکمل مربع کسور اعشاریہ کا جذر

$(.1)^2 = .01$　　اس لیے　$\sqrt{.01} = .1$

$(.01)^2 = .0001$　　اس لیے　$\sqrt{.0001} = .01$

$(.001)^2 = .000001$　　اس لیے　$\sqrt{.000001} = .001$

$(.0001)^2 = .00000001$　　اس لیے　$\sqrt{.00000001} = .0001$

اُوپر کی مثالوں پر غور کریں تو ظاہر ہوتا ہے کہ :

1 درجہ اعشاریہ والے عدد کا مربع 2 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔

2 درجہ اعشاریہ والے عدد کا مربع 4 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔

3 درجہ اعشاریہ والے عدد کا مربع 6 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔

4 درجہ اعشاریہ والے عدد کا مربع 8 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔

اس کے برعکس :

2 درجہ اعشاریہ والے مکمل مربّع عدد کا جذر	ایک درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔
4 درجہ اعشاریہ والے مکمل مربّع عدد کا جذر	2 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔
6 درجہ اعشاریہ والے مکمل مربّع عدد کا جذر	3 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔
8 درجہ اعشاریہ والے مکمل مربّع عدد کا جذر	4 درجہ اعشاریہ والا عدد ہے ۔

اس طرح کی اور مثالیں بھی لی جائیں تو یہ نتیجہ اخذ ہو گا کہ :

(الف) کسی کسر اعشاریہ کے مربّع میں اعشاریہ کے درجوں کی تعداد اصل کسر اعشاریہ کے درجوں کی تعداد سے دگنی ہوتی ہے اور اس لیے لازمی طور پر جفت ہوتی ہے ۔

(ب) پس وہی کسر اعشاریہ مکمل مربّع ہو سکتی ہے جس میں کسر اعشاریہ کے درجوں کی تعداد جفت ہو ۔

(ج) کسی مکمل مربّع کسر اعشاریہ کے جذر میں اعشاریہ کے مراتب کی تعداد اصل کسر اعشاریہ کے مراتب کی تعداد کا نصف ہوتی ہے ۔

آپ سیکھ چکے ہیں کہ صحیح اعداد کا جذر معلوم کرنے کے لیے وقفے اس طرح قائم کرتے ہیں کہ اکائی اور دہائی کا ایک جوڑا بنتا ہے ۔ سینکڑا اور ہزار کا ایک ، دہ ہزار اور لاکھ کا ایک ۔ اور اس طرح مزید وقفے بنتے جاتے ہیں ۔ اگر کسر اعشاریہ کا جذر معلوم کرنا ہو تو اس کے اعشاری مراتب کے وقفے اس طرح بنائیں گے کہ دسویں اور سویں کا ایک وقفہ ہو ۔ ہزارویں اور دہ ہزارویں کا ایک ہو اور اس طرح مزید وقفے بنتے جائیں ۔ پس اگر مخلوط کسر اعشاریہ کا جذر مطلوب ہو تو پہلے دیے ہوئے عدد کے صحیح عددی حصّے میں اکائی کے ہندسہ سے شروع کر کے دائیں سے بائیں طرف اور کسری حصّہ میں دسویں کے ہندسہ سے شروع کر کے بائیں سے دائیں طرف دو، دو کے وقفے قائم کریں گے اور پھر وہی عمل کریں گے جو صحیح اعداد کا جذر دریافت کرنے کے لیے کیا جاتا ہے ۔ البتہ کسری حصّہ کا پہلا وقفہ اُتارنے سے قبل جواب میں نقطہ اعشاریہ درج کر لیں گے ۔

مثال 1 : .7396 کا جذر معلوم کیجیے -

حل :

	.8 6
8	$.\overline{73}\,\overline{96}$
	.64
166	996
	996
	0

پس $\sqrt{.7396} = .86$

مثال 2 : 245.5489 کا جذر دریافت کیجیے -

حل :

	1 5 . 6 7
	$\overline{2}\,\overline{45}.\overline{54}\,\overline{89}$
1	1
	145
25	125
	2054
306	1836
3127	21889
	21889
	0

پس $\sqrt{245.5489} = 15.67$

مثال 3 : .00000729 کا جذر دریافت کیجیے -

حل :

	.0 0 2 7
	$.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{07}\,\overline{29}$
2	4
	329
47	329
	0

پس $\sqrt{.00000729} = .0027$

تشریح : (i) اعشاریہ کے دائیں ہاتھ سے شروع کر کے وقفے قائم کیے تو 4 وقفے بنے - اس لیے جذر میں اعشاریہ کے 4 مراتب ہوں گے -

(ii) اعشاریہ کے دائیں ہاتھ کا پہلا جوڑا $\overline{00}$ جذر کے دسویں کا تعین کرتا ہے - کیونکہ یہ صفر ہے اس لیے دسویں کا ہندسہ صفر لگایا -

(iii) اگلا جوڑا بھی $\overline{00}$ ہے - اس لیے جذر میں سویں کا ہندسہ بھی صفر ہے -

(iv) اگلا جوڑا $\overline{07}$ اُتارا - اب جذر میں ہزارویں کا ہندسہ 2 ملا کیونکہ 7 ، دو کے مربع سے بڑا اور تین کے مربع سے چھوٹا ہے -

(v) پہلے بیان کردہ طریقہ کے مطابق عمل مکمل کیا -

پس $\sqrt{.00000729} = .0027$

مشق 3.4

(1) مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے -

کسر میں اعشاری مراتب کی تعداد	3	1	5	4	7
کسر کے مربع میں اعشاری مراتب کی تعداد	6				

(2) ذیل میں دیے گئے جدول کو مکمل کیجیے -

مکمل مربع کسر میں اعشاری مراتب کی تعداد	4	10	18	12	8
کسر کے جذر میں اعشاری مراتب کی تعداد	2				

مندرجہ ذیل کسور اعشاریہ میں کون سی کسر مکمل مربع ہو سکتی ہے اور کون سی نہیں؟
جواب کے حق میں دلیل بھی دیجیے۔ (زبانی)

(3)	.4	(4)	.16	(5)	.25
(6)	2.5	(7)	.1	(8)	.01
(9)	.256	(10)	2.56	(11)	.9
(12)	.04				

مندرجہ ذیل کسور اعشاریہ کے مربع معلوم کیجیے۔ (زبانی)

(13)	.3	(14)	.5	(15)	.1	(16)	.7	(17)	.2
(18)	.12	(19)	1.2	(20)	.03	(21)	1.3	(22)	.13
(23)	.11	(24)	1.1						

مندرجہ ذیل کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کیجیے۔ (زبانی)

(25)	.01	(26)	.49	(27)	.64	(28)	.09
(29)	.0025	(30)	.04	(31)	.0001	(32)	.36

جذر معلوم کیجیے۔

(33)	.5041	(34)	88.36	(35)	.000361
(36)	9.2416	(37)	.045369	(38)	16.4025
(39)	.9801	(40)	1.002001	(41)	26.4196
(42)	291.7264	(43)	115.004176	(44)	903.0025
(45)	1029.7681	(46)	6.275025	(47)	282.9124
(48)	14.9769				

3.6 نامکمل مربع اعداد کا جذر:

ابھی تک صرف ایسے اعداد لیے گئے ہیں جو مکمل مربع ہیں اور اُن کا پُورا پُورا جذر نکل سکتا ہے۔ ان کے علاوہ ایسے اعداد بھی ہیں جو مکمل مربع نہیں۔ اس لیے ان کا پُورا پُورا جذر نہیں نکل سکتا۔ ایسی صورت میں اعداد کا جذر چند مراتب اعشاریہ

تک صحیح معلوم کر سکتے ہیں۔ جذر معلوم کرنے کے اصول وہی ہیں جو پہلے بیان کیے جا چکے ہیں۔ یعنی نقطہ اعشاریہ سے بائیں طرف دو، دو ہندسوں کے وقفے بنائیں اور اگر آخری ہندسہ اکیلا رہ جائے تو اُسے بھی پُورا وقفہ شمار کیا جائے اور نقطہ اعشاریہ سے دائیں طرف دو، دو ہندسوں کے وقفے قائم کریں۔ اگر آخری جوڑا مکمل نہ ہو تو صفر بڑھا کر اُسے مکمل کر لیا جائے۔ جذر میں جتنے مراتب اعشاریہ مطلوب ہوں اُس کے مطابق دو، دو صفر بڑھا کر جوڑے بنا لیے جائیں۔ تفصیلی عمل مثالوں سے واضح ہے۔

مثال 1 : 2 کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک صحیح معلوم کیجیے۔

حل :

	1.4142
1	$\overline{2}.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
	100
24	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
	3836

پس 2 کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک = 1.414

مثال 2 : 9.522 کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک صحیح دریافت کیجیے۔

حل :

	3.085
3	$\overline{9}.\overline{52}\ \overline{20}\ \overline{00}$
	9
608	5220
	4864
6165	35600
	30825
	4775

پس مطلوبہ جذر = 3.09

مثال 3 : 0.1 کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے ۔

حل :

	.3 1 6
3	$0.\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	9
61	100
	61
626	3900
	3756
	144

پس 0.1 کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک = .32

مشق 3.5

مندرجہ ذیل اعداد کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک صحیح معلوم کیجیے :

(1) 3   (2) 5   (3) 7   (4) 15   (5) 1.6

(6) 6.4   (7) 0.4   (8) 10   (9) 550   (10) 1000

مندرجہ ذیل اعداد کا جذر تین درجے اعشاریہ تک صحیح معلوم کیجیے :

(11) 98   (12) 69   (13) 50   (14) 4.9

(15) 8.7   (16) 9.3   (17) 17.8   (18) 0.9

(19) 0.06   (20) 0.003   (21) 4.12   (22) 220

(23) 5.3   (24) 53   (25) 0.53

3.7 کسور عام کا جذر :

کسور عام کا جذر دو طریقوں سے معلوم کیا جاتا ہے ۔

پہلا طریقہ : کسر عام کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کا الگ الگ جذر معلوم کرتے ہیں۔ انھیں شمار کنندہ اور نسب نما بنا کر جو کسر حاصل ہوگی وہ مطلوبہ جذر ہوگا۔ اگر کسر مخلوط ہو تو اسے پہلے غیر واجب بنا لیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$1\frac{1}{6}=\frac{7}{6}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}=\sqrt{\frac{49}{36}}=\sqrt{1\frac{13}{36}}$$

دوسرا طریقہ: کسرِ عام کو کسر اعشاریہ میں تبدیل کر کے تقسیم کے طریقہ سے جذر دریافت کرتے ہیں۔ مثلاً

$$\sqrt{2.8} = \sqrt{\frac{14}{5}}$$

اور 2.8 کا جذر دو درجہ اعشاریہ تک = 1.67

مثال 1: $3\frac{6}{25}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$1\frac{4}{5} = \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \sqrt{3\frac{6}{25}}$$

مثال 2: $2\frac{3}{16}$ کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک دریافت کیجیے۔

حل:

$$1.479 = \frac{5.916}{4} = \frac{\sqrt{35}}{4} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{35}{16}} = \sqrt{2\frac{3}{16}}$$

مثال 3: $7\frac{5}{8}$ کا جذر دو مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل:

$$\frac{\sqrt{122}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{2\times 61}{2\times 8}} = \sqrt{\frac{61}{8}} = \sqrt{7\frac{5}{8}}$$

$$2.76 = \frac{11.04}{4} = \frac{\sqrt{122}}{4} =$$

مثال 4: $\frac{11}{20}$ کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل:

$$\sqrt{.55} = \sqrt{\frac{11}{20}}$$

	.7 4 1 6
7	$\overline{0}.\overline{55}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	49
144	600
	576
1481	2400
	1481
14826	91900
	88956
	2944

پس $\frac{11}{20}$ کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک = 0.742

مشق 3.6

جذر معلوم کیجیے :

(1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{16}{25}$ (3) $5\frac{19}{25}$ (4) $7\frac{9}{16}$

(5) $\frac{256}{225}$ (6) $\frac{144}{169}$

مندرجہ ذیل کسور کا جذر تین مراتب اعشاریہ تک معلوم کیجیے :

(7) $21\frac{3}{4}$ (8) $10\frac{8}{9}$ (9) $9\frac{41}{100}$

(10) $\frac{431}{1000}$ (11) $5\frac{11}{16}$ (12) $22\frac{1}{49}$

(13) $2\frac{1}{3}$ (14) $1\frac{5}{6}$ (15) $3\frac{3}{10}$

(16) $\frac{36}{5}$ (17) $\frac{10}{3}$ (18) $\frac{17}{6}$

3.8 متفرق سوالات

مثال 1: ایک مستطیل کھیت کا طول ، عرض سے دُگنا ہے اور اس کا رقبہ 8712 مربع میٹر ہے۔ کھیت کے طول اور عرض کی مقداریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ کھیت کا عرض = لا میٹر

اس لیے کھیت کا طول = 2 لا میٹر

اور کھیت کا رقبہ = لا × 2 لا = 2 لا^2

کھیت کا دیا ہوا رقبہ = 8712 مربع میٹر

اس لیے 2 لا^2 = 8712

یا لا^2 = 4356

یا لا = $\sqrt{4356}$ = 66 اور 2 لا = 132

پس کھیت کا عرض = 66 میٹر اور طول = 132 میٹر

مثال 2 : 3675 کو کس چھوٹے سے چھوٹے عدد سے ضرب دی جائے کہ حاصل شدہ عدد ایک مکمل مربّع ہو۔

حل :

5	3675
5	735
7	147
7	21
	3

$3 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 = 3675$

$3 \times 7^2 \times 5^2 =$

اس لیے مطلوبہ عدد = 3

کیونکہ 3675 × 3 کا جذر 5 × 7 × 3 = 105 ہے۔

مثال 3 : 10648 میں سے کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد تفریق کیا جائے کہ حاصل شدہ عدد ایک مکمل مربّع ہو۔

حل :

	1 0 3
1	$\overline{1}\ \overline{06}\ \overline{48}$
	1
203	0648
	609
	39

پس مطلوبہ عدد = 39

مشق 3.7

(1) ایک مربّع شکل کے قطعہ اراضی کا رقبہ 40804 مربّع میٹر ہے۔ اس کے ایک ضلع کی لمبائی بتائیے۔

(2) ایک مربّع کھیت کا رقبہ 24554.89 مربّع میٹر ہے۔ اس کے کناروں پر چاروں طرف تار لگانا ہے۔ تار کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(3) ایک باغ میں 8464 درخت مربّعی علاقے میں لگانے ہیں۔ یعنی ہر قطار میں اتنے درخت ہوں جتنی قطاروں کی تعداد۔ بتائیے ایک قطار میں کتنے درخت لگیں گے۔

(4) آٹھویں جماعت کے لڑکوں نے پکنک کے لیے 56.25 روپے اکٹھے کیے۔ اگر ہر لڑکے نے اتنے ہی پیسے دیے ہوں جتنے کہ جماعت میں لڑکے تھے تو بتائیے ہر لڑکے نے کتنے پیسے دیے۔

(5) ایک مستطیل باغ کی لمبائی، چوڑائی سے تین گنا ہے اور اس کا رقبہ 37632 مربع میٹر ہے۔ باغ کی چوڑائی اور لمبائی معلوم کیجیے۔

(6) ایک ہال کمرے کے فرش کی مرمّت کرانے کا خرچ 4 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے 2904 روپے ہے۔ اگر کمرے کی لمبائی، چوڑائی سے ڈیڑھ گنا ہو تو لمبائی اور چوڑائی دریافت کیجیے۔

(7) ایک گول کیاری میں کھاد ڈالنے اور پنیری لگانے کا خرچ 0.6 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے 369.6 روپے ہوا۔ کیاری کے قطر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(8) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد بتائیے کہ اگر اُسے 5376 میں جمع کیا جائے تو حاصل شدہ عدد ایک مکمل مربع ہو۔

(9) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے کہ اگر اسے 2156 سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب ایک مکمل مربع عدد ہو۔

(10) مالی کو ایک دائروی کیاری بنانی ہے۔ کیاری کا محیط قائم کرنے کے لیے کتنے رداس کی رسی لی جائے کہ 346.5 مربع میٹر زمین گھر جائے؟

[اشارہ : دائروی علاقہ کا رقبہ = π × $(\text{رداس})^2$]

باب 4

نسبت اور تناسب

4.1 نسبت

روزمرّہ زندگی میں بعض اوقات دو ہم نوع مقداروں کا مقابلہ انھیں ایک ہی اکائی میں تحویل کر کے، اُن کے فرق سے کیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر ظفر کے پاس 13 روپے اور اکرم کے پاس 11 روپے ہوں تو ظفر کے پاس اکرم سے دو روپے زیادہ ہوں گے۔ اس طرح سے مقابلہ کرنے کو مقابلہ بذریعہ تفریق کہتے ہیں۔ لیکن بعض اوقات ہم ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا مقابلہ انھیں ایک ہی اکائی میں تحویل کر کے، اُن کے حاصل تقسیم سے کرتے ہیں۔ اسے مقابلہ بذریعہ تقسیم کہتے ہیں اور اسے نسبت سے موسوم کرتے ہیں۔ مثلاً سلیم کی عمر 12 سال ہے اور اُس کی بہن رخشندہ کی عمر 6 سال ہے تو ظاہر ہے کہ $12 \div 6$ یا $\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ سلیم اور اس کی بہن رخشندہ کی عمروں میں (12 اور 6) یا 2 اور 1 کی نسبت ہے۔ ہم اسے لکھتے ہیں 2 : 1 اور پڑھتے ہیں 'دو نسبت ایک'۔ اسی طرح اگر دو کتابوں کی قیمت ترتیب وار 7 روپے اور 21 روپے ہو تو اُن کی قیمتوں میں نسبت 7 : 21 یا 1 : 3 ہوگی۔ خیال رہے کہ یہاں 1 : 3 کے ساتھ روپے یا کتاب لکھنا درست نہ ہوگا۔

چونکہ دو مقداروں میں نسبت کو کسر کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے ہم

(i) کسی نسبت کی مترادف نسبتوں کا سیٹ معلوم کرنے کے لیے یا

(ii) کسی نسبت کو مختصر صورت میں تبدیل کرنے کے لیے

کسروں کا سنہری اُصول استعمال کرتے ہیں۔ اس اصول کے تحت کسی نسبت کے ارکان کو ایک ہی عدد سے (جو غیر صفر ہو) ضرب دیں یا تقسیم کریں تو اس طرح حاصل ہونے والی نسبت اصل نسبت کے مترادف ہوتی ہے۔

چنانچہ 2 : 1 کی مترادف نسبتوں کا سیٹ

{2 : 1، 4 : 2، 6 : 3، 8 : 4، 10 : 5، 12 : 6، ....} ہے۔

یہاں سیٹ کا کوئی رکن معلوم کرنے کے لیے، دی ہوئی نسبت 1:2 کے پہلے رکن '1' کو جس عدد سے ضرب دی گئی ہے، دوسرے رکن '2' کو بھی اُسی عدد سے ضرب دی گئی ہے۔

اسی طرح $20:15 = \frac{5 \div 15}{5 \div 20} = \frac{3}{4} = 4:3$

یہاں نسبت کو مختصر کرنے کے لیے نسبت کے ارکان کو ایک ہی عدد '5' پر تقسیم کیا گیا ہے۔

مثال 1: اجمل کے پاس 2 روپے 50 پیسے اور اکرم کے پاس 3 روپے ہیں۔ ان کی رقموں میں نسبت معلوم کریں۔

حل: اجمل کی رقم = 2 روپے 50 پیسے = 250 پیسے
اکرم کی رقم = 3 روپے = 300 پیسے

اجمل کی رقم : اکرم کی رقم = $\frac{\text{اجمل کی رقم}}{\text{اکرم کی رقم}}$

$= \frac{250}{300} = \frac{50 \div 250}{50 \div 300} = \frac{5}{6}$ یا 6:5

پس اجمل اور اکرم کی رقموں میں نسبت 6:5 ہے جب کہ اکرم اور اجمل کی رقموں میں نسبت 5:6 ہے۔

مثال 2: اسلم نے سہ ماہی امتحان میں 600 میں سے 360 نمبر حاصل کیے اور ششماہی امتحان میں 700 میں سے 450 نمبر۔ کیا اُس نے ترقی کی؟

حل: $\frac{360}{600} = \frac{36}{60} = \frac{12 \div 36}{12 \div 60} = \frac{3}{5}$

$\frac{450}{700} = \frac{45}{70} = \frac{5 \div 45}{5 \div 70} = \frac{9}{14}$

نسب نماؤں (5، 14) کا ذواضعاف اقل 70 ہے۔

اس لیے $\frac{3}{5} = \frac{14 \times 3}{14 \times 5} = \frac{42}{70} = 70:42$

اور $70:45 = \frac{45}{70} = \frac{5 \times 9}{5 \times 14} = \frac{9}{14}$

پس ظاہر ہے کہ اسلم نے ششماہی امتحان میں ترقی کی ہے۔

مثال 3: $3\frac{1}{2}$ اور $5\frac{2}{3}$ میں کیا نسبت ہے؟

حل: $5\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$

$= \frac{17}{3} : \frac{7}{2}$

$= 6 \times \frac{17}{3} : 6 \times \frac{7}{2}$ (6 سے ضرب دینے سے)

$= 34 : 21$

4.2 تناسب

ہم جانتے ہیں کہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرنے والا فقرہ تناسب کہلاتا ہے۔ چنانچہ فقرہ $3:2 = 6:4$ یا $6:4 :: 3:2$ یا $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ایک تناسب ہے۔ تناسب میں پہلے اور آخری دونوں ارکان کو طرفین اور درمیان والے دو ارکان کو وسطین کہتے ہیں۔

وسطین

$6 : 4 :: 3 : 2$

طرفین

یاد رہے کہ ہر تناسب میں، طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

چنانچہ $4 \times 3 = 6 \times 2$

اس خاصیت کی مدد سے ہم کسی تناسب کی چوتھی مقدار آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں جب کہ اس کی کوئی سی تین مقداریں معلوم ہوں۔ اس قاعدے کو اربعہ متناسبہ کہتے ہیں۔

مثال 4: مندرجہ ذیل تناسب میں لا کی قیمت معلوم کیجیے۔

42 : لا = 7 : 5

حل: چونکہ $7:5 = لا : 42$ تناسب ہے۔

اس لیے $7 \times لا = 5 \times 42$ درست فقرہ ہے۔

چنانچہ $\frac{7 \times لا}{7} = \frac{42 \times 5}{7}$ (وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب)

پس $لا = 30$

4.3 تناسب راست

اگر دو مقداروں میں ایسا تعلق ہو کہ ایک مقدار جس نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہو، دوسری بھی اُسی نسبت سے بڑھے یا کم ہو، تو ایسے تناسب کو تناسب راست کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ایک کلوگرام گھی کی قیمت 10 روپے ہو تو 2 کلوگرام گھی کی قیمت 20 روپے اور 5 کلوگرام گھی کی قیمت 50 روپے ہوگی۔ ایسی صورت میں $5:2 = 50:20$ یعنی اگر گھی کی مقدار دوگنی ہوگی تو کُل قیمت بھی دوگنی ہوگی اور اگر مقدار پانچ گنا ہوگی تو کُل قیمت بھی پانچ گنا ہوگی۔ تناسب راست کی چند مثالیں حسب ذیل ہیں:

(I) پنسلوں کی تعداد اور اُن کی قیمت میں تناسب راست ہوتا ہے۔

(II) کپڑے کی لمبائی اور اُس کی قیمت میں تناسب راست ہوتا ہے۔

(III) مکان میں رہائش کی مدّت اور اُس کے کرایہ میں تناسب راست ہے۔

(IV) مزدوروں کی تعداد اور کام کی مقدار میں تناسب راست ہے۔

(V) گھر میں افراد کی تعداد اور سرکاری راشن کی مقدار میں تناسب راست ہے۔

مثال 5: ایک آدمی 8 دن میں 40 روپے کماتا ہے۔ 15 دن میں کتنے روپے کمائے گا؟

دن	روپے	
8	40	دنوں اور روپوں میں
15	لا	تناسب راست ہے۔

اس لیے* $8:15 = 40 : لا$

یا $8 \times لا = 15 \times 40$ (طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب)

---

*اس فقرے کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں: اس لیے $\frac{8}{15} = \frac{40}{لا}$ یا $\frac{15}{8} = \frac{لا}{40}$

$$\text{یا لا} = \frac{40 \times 15}{8} = 75 \text{ روپے}$$

پس وہ آدمی 15 دن میں 75 روپے کمائے گا۔

مشق 4.1

(1) ذیل کی مقداروں کے درمیان (دی ہوئی ترتیب میں) نسبت معلوم کیجیے۔

(I) 30 کتابیں، 36 کتابیں

(II) 5 روپے 50 پیسے، 7 روپے

(III) 3 میٹر 5 ڈیسی میٹر، 4 میٹر 9 ڈیسی میٹر

(IV) 2 کلوگرام 7 ہیکٹوگرام، 3 کلوگرام 6 ہیکٹوگرام

(V) $3\frac{1}{2}$ ، $5\frac{1}{4}$

(2) نیچے دی ہوئی ہر نسبت کی مترادف نسبتوں کا سیٹ معلوم کریں۔

(I) 4:3 (II) 5:6 (III) 7:2

(3) ایک بس نے 2 گھنٹے میں 70 کلومیٹر فاصلہ طے کیا اور ایک ریل گاڑی نے 3 گھنٹے میں 126 کلومیٹر۔ بس اور ریل گاڑی کی فی گھنٹہ رفتاروں میں نسبت معلوم کیجیے۔

(4) اسلم کا قد 1 میٹر 8 ڈیسی میٹر اور اُس کی بہن کا قد 1 میٹر 5 ڈیسی میٹر ہے۔ اُن کے قدوں میں نسبت معلوم کریں۔

(5) احسان نے 20 روپے کی آمدنی میں سے 12 روپے 50 پیسے خرچ کیے اور انعام نے 30 روپے کی آمدنی میں سے 18 روپے خرچ کیے۔ کل آمدنی کے لحاظ سے کس کا خرچ نسبتاً کم ہے؟

(6) ذیل میں □ کی بجائے کون سا عدد ہو کہ تناسب بن جائے؟

(I) $\square : 6 = 10 : 4$

(II) $6\frac{2}{5} : \square = 8 : 5$

(III) $\frac{12}{10} = \frac{6}{\square}$

(7) ایک درجن سلیٹوں کی قیمت 18 روپے ہے۔ ایک کوڑی سلیٹوں کی قیمت معلوم کریں۔

(8) 6 انڈوں کے حلوے کے لیے 15 چمچے چینی درکار ہے۔ بتائیے 8 انڈوں کے حلوے کے لیے کتنے چمچے چینی درکار ہوگی۔

(9) 154 روپے میں 4 کوئنٹل لکڑی خریدی گئی۔ 385 روپے میں کتنی لکڑی ملے گی؟

(10) ایک نقشے پر 5 سینٹی میٹر کا فاصلہ 40 کلومیٹر کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقشے پر 120 کلومیٹر لمبی سیدھی سڑک کو، کتنے لمبے قطعہ خط سے ظاہر کریں گے؟

(11) ایک بنک کی شرح منافع 5 فیصد سالانہ ہے۔ یہ بنک 1600 روپے پر ہر سال کتنا منافع ادا کرتا ہے؟

(12) احمد نے 75 نمبروں کے پرچے میں سے 50 نمبر حاصل کیے۔ اُس نے اس پرچے میں کتنے فیصد نمبر حاصل کیے؟

(13) کسی جائداد کے $\frac{5}{11}$ حصّے کی قیمت 4,580 روپے ہے۔ بتائیے اس کے $\frac{3}{4}$ حصّے کی کیا قیمت ہوگی۔

(14) اگر 100 روپے پر 2.50 روپے زکوٰۃ ادا کی جائے تو اس شخص کی کل بچت بتائیے جو 260.25 روپے زکوٰۃ دیتا ہو۔

(15) جس وقت 18 ڈیسی میٹر اُونچے بانس کا سایہ 22.5 ڈیسی میٹر تھا، اُس وقت بادشاہی مسجد کے مینار کا سایہ 610 ڈیسی میٹر تھا۔ مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔

4.4 تناسب معکوس:

ہم جانتے ہیں کہ اگر دو مقداریں ایسی ہوں کہ اُن میں سے کسی ایک مقدار میں کمی سے دوسری مقدار میں اسی نسبت سے کمی ہو جائے اور ایک مقدار میں زیادتی سے دوسری مقدار میں اسی نسبت سے زیادتی ہو جائے، تو ان مقداروں میں

تناسب راست پایا جاتا ہے۔ لیکن بعض مقداریں ایسی بھی ہوتی ہیں کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار اسی نسبت سے کم ہوتی ہے اور ایک مقدار میں کمی سے دوسری مقدار میں اسی نسبت سے اضافہ ہوتا ہے۔ مثلاً اگر مزدوروں کے کام کرنے کی رفتار یکساں ہو، تو :

جو کام 4 آدمی، 12 دن میں مکمل کرتے ہیں، وہی کام 8 (دوگنے) آدمی، 6 دن (آدھے وقت) میں مکمل کریں گے۔

اور وہی کام 16 (چوگنے) آدمی، 3 دن (چوتھائی وقت) میں مکمل کر لیں گے۔ یعنی آدمی جتنے زیادہ ہوں گے، وقت اُتنا ہی کم لگے گا۔

اور آدمی جتنے کم ہوں گے، وقت اُسی حساب سے زیادہ صرف ہوگا۔

چنانچہ اگر دو مقداروں میں ایسا تعلق ہو کہ ایک کے بڑھنے سے دوسری اُسی نسبت سے کم ہو اور ایک کے گھٹنے سے دُوسری اُسی نسبت سے بڑھے، تو ایسے تعلق کو **تناسب معکوس** کہتے ہیں۔

چنانچہ اس مثال میں آدمیوں اور دنوں کی تعداد میں تناسب معکوس ہے۔

مثال 1 : 150 سپاہیوں کے لیے خوراک کا ایک ذخیرہ 20 دنوں کے لیے کافی ہے۔ اگر 100 سپاہی اور آ جائیں تو وہی ذخیرہ کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگا؟

حل: فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد = لا

کل سپاہی = 150 + 100 = 250

سپاہی	دن	
150	20	سپاہی زیادہ تو دن کم
250	لا	(تناسب معکوس)

*$\frac{150}{250} = \frac{\text{لا}}{20}$ یا $250 \times \text{لا} = 150 \times 20$ یا لا $= \frac{20 \times 150}{250} = 12$

---

*(I) تناسب معکوس ہونے کی وجہ سے نسبت $\frac{250}{150}$ کا ضربی معکوس $\frac{150}{250}$ استعمال کیا ہے۔

(II) اس فقرے کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :

$\frac{250}{150} = \frac{20}{\text{لا}}$ (یا 250:150 :: 20 : لا)

پس ذخیرہ 12 دن کے لیے کافی ہوگا۔

مثال 2 : 14 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک فاصلہ 10 گھنٹوں میں طے ہوا۔ فی گھنٹہ رفتار کتنی ہو کہ یہی فاصلہ 7 گھنٹے میں طے ہو جائے ؟

حل : فرض کیا فی گھنٹہ مطلوبہ رفتار = لا کلومیٹر

وقت (گھنٹے)	رفتار فی گھنٹہ (کلومیٹر)	
10	14	گھنٹے کم تو رفتار زیادہ
7	لا	(تناسب معکوس)

$$\frac{7}{10} = \frac{14}{\text{لا}} \quad [\text{یا } 7 : 10 :: 14 : \text{لا}]$$

یا $7 \times \text{لا} = 14 \times 10$

یا $\text{لا} = \frac{14 \times 10}{7} = 20$

پس فی گھنٹہ رفتار 20 کلومیٹر ہونی چاہیے۔

مشق 4.2

(1) خالی جگہوں پر 'کم' یا 'زیادہ' میں سے کون سا لفظ درست ہوگا ؟

(i) ایک دن میں 10 آدمی ، 5 آدمیوں کے مقابلے میں ------ کام کریں گے۔

(ii) مٹی کے تیل کا نرخ زیادہ ہونے کی وجہ سے 20 روپے میں پہلے کی نسبت -----تیل خریدا جا سکتا ہے۔

(iii) اگر آٹے کا بھاؤ 70 روپے کوئنٹل سے 75 روپے کوئنٹل ہو جائے تو 100 روپے میں نسبتاً ----- آدمیوں کے لیے آٹا خریدا جا سکتا ہے۔

(iv) اگر 5 آدمی ایک کام کو 4 دن میں کریں تو ایک آدمی نسبتاً ----- دنوں میں کرے گا۔

(v) اگر فی کس راشن 2 ہیکٹوگرام سے $2\frac{1}{2}$ ہیکٹوگرام کر دیا جائے تو 100 کوئنٹل

گندم میں پہلے کے مقابلے میں ۔۔۔۔۔ آدمیوں کو راشن مل سکتا ہے ۔

(2) اگر 6 آدمی کسی کام کو 10 دن میں ختم کریں تو بتائیے کہ 5 آدمی اُسی کام کو کتنے دن میں ختم کریں گے ۔

(3) 15 مزدور ایک گڑھا 6 گھنٹے میں کھود سکتے ہیں ۔ 18 مزدور وہی گڑھا کتنی دیر میں کھود لیں گے ؟

(4) ایک گاڑی 40 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کچھ فاصلہ $6\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کرتی ہے ۔ بتائیے 26 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنے والی گاڑی وہی فاصلہ کتنی دیر میں طے کرے گی ۔

(5) 15 ڈیسی میٹر گھیرے کا پہیّہ کچھ فاصلہ طے کرنے میں 304 چکر لگاتا ہے ۔ بتائیے 19 ڈیسی میٹر گھیرے کا پہیّہ یہی فاصلہ طے کرنے میں کتنے چکر لگائے گا ۔

(6) اگر ایک کاتب 6 گھنٹے روزانہ کام کر کے ایک کتاب 10 دن میں لکھے ، تو $7\frac{1}{2}$ گھنٹے روزانہ کام کر کے وہ اُسی کتاب کو کتنے دن میں لکھ سکتا ہے ؟

(7) 250 سپاہیوں کے لیے خوراک کا ایک ذخیرہ 42 دن کے لیے کافی ہے ۔ اگر 50 سپاہی اور آ جائیں تو خوراک کا وہی ذخیرہ کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگا ؟

(8) ایک گھر میں 15 افراد کی ماہ جون کی خوراک موجود تھی ۔ 5 افراد چلے گئے ۔ اب یہ خوراک کتنے دن مزید چلے گی ؟

(9) 2.5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کچھ فاصلہ 6 گھنٹوں میں طے ہوا ۔ اگر یہ فاصلہ 5 گھنٹوں میں طے کرنا ہو تو رفتار فی گھنٹہ کیا ہوگی ؟

(10) ایک جگہ پر 1800 آدمیوں کے لیے 14 دن کا کھانے کا سامان موجود تھا لیکن کچھ آدمی چلے گئے اور کھانے کا سامان 4 دن زیادہ چلا ۔ بتائیے کتنے آدمی چلے گئے ۔

(11) ایک کیمپ میں 22400 انسانوں کے لیے 3 ہفتے کی خوراک موجود تھی ، کچھ آدمیوں کے چلے جانے سے وہی خوراک 7 ہفتے کے لیے کافی ہو گئی ۔ چلے جانے والے آدمیوں کی تعداد معلوم کیجیے ۔

(12) صوفی عبدالکریم صاحب نے ختمِ قرآن کے موقعہ پر دو مسجدوں میں یکساں تعداد میں لڈو بھجوائے۔ ایک مسجد میں 117 نمازی تھے اور وہاں ہر نمازی کو 4 لڈو ملے، لیکن دوسری مسجد میں 3 لڈو فی کس ملے۔ بتائیے دوسری مسجد میں کتنے نمازی موجود تھے۔

(13) ایک قلعے میں 780 آدمی تھے جن کے پاس 38 دن کی خوراک موجود تھی۔ 7 دن کے بعد اُن میں سے 160 آدمی چلے گئے۔ باقی آدمی باقی خوراک کتنے دنوں میں کھائیں گے؟

(14) ایک گرل گائڈ کیمپ میں 120 لڑکیوں کے لیے 10 دن کا راشن موجود تھا۔ 3 دن کے بعد 15 لڑکیاں چلی گئیں۔ اب باقی سامان کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگا؟

(15) ایک قلعے میں 1545 سپاہیوں کے پاس 30 دن کی خوراک موجود ہے۔ 11 دن کے بعد 412 سپاہی اور شامل ہو گئے۔ بتائیے وہی خوراک اب کتنے دن اور چلے گی۔

4.5 تناسب مرکّب

اکثر اوقات ایسے مسائل حل کرنے پڑتے ہیں جن میں ایک ہی وقت میں ایک سے زیادہ تناسب استعمال ہوتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں تناسبوں کے باہمی تعلق کو تناسب مرکّب کہتے ہیں۔ اور یہاں اربعہ متناسبہ کا استعمال ایک سے زیادہ مرتبہ کرنا پڑتا ہے۔ تناسب مرکّب کے سوالات حل کرنے کا طریقہ ذیل کی مثالوں سے واضح ہو جائے گا۔

مثال 1 : ایک ہوسٹل میں 50 آدمیوں کا 30 دن کا خرچ 7,500 روپے ہے۔ اگر 40 آدمی 25 دن تک اس ہوسٹل میں ٹھہریں تو اسی حساب سے کتنا خرچ ہوگا؟

تجزیہ : سوال میں آدمی، دن اور روپے یعنی تین مقداروں کا تعلق بیان کیا گیا ہے، جن میں آدمیوں اور دنوں کی تعداد میں تبدیلی کی وجہ سے

روپوں کی تعداد میں تبدیلی دریافت کرنا مطلوب ہے۔ اس سوال کو حل کرنے کے لیے اربعہ متناسبہ کا استعمال، ایک مرتبہ تو آدمیوں کی تعداد میں تبدیلی کے سبب ہوگا اور دوسری مرتبہ دنوں کی تعداد میں تبدیلی کے باعث۔ چنانچہ اس سوال کے مندرجہ ذیل دو حصے کیے جا سکتے ہیں:

(i) 50 آدمیوں کا (30 دن کا) خرچ 7500 روپے ہو تو 40 آدمیوں کا (اُسی مدت کا) خرچ کیا ہوگا؟ (فرض کیجیے کہ اس کا جواب □ روپے ہے)۔

(ii) اگر (40 آدمیوں کا) 30 دن کا خرچ □ روپے ہو تو (اُتنے ہی آدمیوں کا) 25 دن کا خرچ کیا ہوگا؟

حل:

	آدمی	خرچ (روپوں میں)	
(i)	50	7500	آدمی کم خرچ کم
	40	□	(تناسب راست)

اس لیے $\frac{40}{50} = \frac{\square}{7500}$ یا $\square \times 50 = 7500 \times 40$

یا $\square = \frac{40}{50} \times 7500$ ——— (I)

یا $\square = 6000$ ——— (II)

	دن	خرچ (روپوں میں)	
(ii)	30	6000	دن کم خرچ کم
	25	□	یعنی تناسب راست ہے۔

اس لیے $\frac{25}{30} = \frac{\square}{6000}$ یا $\square \times 30 = 6000 \times 25$

یا $\square = 6000 \times \frac{25}{30} = 5000$ — (III)

پس مطلوبہ خرچ = 5000 روپے

نوٹ: نتائج (I)، (II)، (III) کی مدد سے

$\square = 6000 \times \frac{25}{30}$ ——— نتیجہ (III) سے

یا $\square$ = خرچ $\times \frac{25}{30}$ ______ (نتیجہ II کی رُو سے)

یا $\square = 7500 \times \frac{40}{50} \times \frac{25}{30}$ ______ (نتیجہ I سے)

پس $\frac{\square}{7500} = \frac{40}{50} \times \frac{25}{30}$ یا $\frac{\square}{7500} = \frac{25}{30} \times \frac{40}{50}$

ہم دیکھتے ہیں کہ

آدمیوں میں نسبت اور دنوں میں نسبت کا حاصل ضرب = روپوں میں نسبت

اس نتیجے کی روشنی میں مثال 1 کو یوں حل کریں گے :

مختصر طریقہ :

آدمی	دن	خرچ (روپوں میں)	
50	30	7500	کم آدمی کم خرچ (تناسب راست)
40	25	$\square$	کم دن کم خرچ (تناسب راست)

اس لیے $\frac{\square}{7500} = \frac{25}{30} \times \frac{40}{50}$

یا $\square = \frac{40}{50} \times \frac{25}{30} \times 7500 = 5000$ روپے

مثال 2 : ایک ٹھیکیدار نے ایک کوٹھی 36 دن میں تعمیر کرانے کا ٹھیکہ لیا اور اس پر 180 آدمی لگائے - 28 دن میں کام کا $\frac{7}{10}$ حصّہ تیار ہوا۔ بتائیے وہ کتنے آدمی اور لگائے کہ کام وقت معینہ پر ختم ہو جائے ۔

حل : فرض کیا کل آدمی = لا

باقی دن = 36 − 28 = 8

باقی کام = $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

دن	کام	آدمی	
28	$\frac{7}{10}$	180	دن کم آدمی زیادہ (تناسب معکوس)
8	$\frac{3}{10}$	لا	کام کم آدمی کم (تناسب راست)

اس لیے $\frac{28}{8} \times \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{لا}{180}$

یا $لا = \frac{28}{8} \times \frac{3}{10} \times \frac{10}{7} \times 180 = 270$

پس جتنے آدمی اور لگائے $= 270 - 180 = 90$

متبادل طریقہ : (مندرجہ بالا حل کی پہلی چھے سطور لکھنے کے بعد ذیل کا عمل کیجیے۔)

دن	8	:	28		آدمی	
کام	$\frac{7}{10}$	:	$\frac{3}{10}$	::	180 : لا	

$8 \times \frac{7}{10} \times لا = 28 \times \frac{3}{10} \times 180$

یا $لا = 28 \times \frac{3}{10} \times 180 \times \frac{1}{8} \times \frac{10}{7} = 270$

پس زائد آدمی جو لگائے $= 270 - 180 = 90$

نوٹ : مثال 1 کو مثال 2 کے متبادل طریقے سے خود حل کیجیے۔

مشق 4.3

(1) اگر 15 آدمیوں کی 6 دن کی مزدوری 360 روپے ہو تو 23 آدمیوں کی 14 دن کی مزدوری کیا ہوگی؟

(2) کسی شرح سے 100 روپے کا 4 سال کا سُود مفرد 16 روپے ہے۔ اسی شرح سے 500 روپے کا 3 سال کا سُود مفرد کتنا ہوگا؟

(3) اگر بجلی کے ایک ہی طاقت کے 25 بلب اوسطاً 5 گھنٹے روزانہ جلیں تو بجلی کا ماہانہ خرچ 150 روپے ہوتا ہے۔ اسی طاقت کے 20 بلب 8 گھنٹے روزانہ جلانے سے بجلی کا ماہانہ خرچ معلوم کیجیے۔

(4) اگر گندم کا بھاؤ 80 روپے فی کوئنٹل ہو تو ایک کنبے کا خرچ 16 دن کے لیے

72 روپے ہے۔ اگر بھاؤ 96 روپے فی کوئنٹل ہو تو 5 دن کے لیے کیا خرچ ہوگا؟

(5) 60 آدمی 500 میٹر لمبی دیوار 25 روز میں بناتے ہیں۔ اُسی حساب سے 800 میٹر لمبی دیوار 32 دن میں کتنے آدمی بنا لیں گے؟

(6) اگر 24 آدمی 8 گھنٹے روزانہ کام کر کے ایک کام کو 21 دن میں ختم کریں تو بتائیے کہ 36 آدمی 7 گھنٹے روزانہ کام کر کے اُسی کام کو کتنے دنوں میں ختم کریں گے۔

(7) اگر 25 آدمیوں کا 40 کلومیٹر کا کرایہ 70 روپے ہو تو بتائیے کہ 136.50 روپے میں کتنے آدمی 78 کلومیٹر تک جا سکیں گے۔

(8) اگر 240 روپے، 4 افراد کے ایک کنبے کے لیے 40 دن تک کافی ہوں تو اُسی حساب سے 315 روپے میں کتنے دن تک 6 افراد کا گزارہ ہو سکے گا؟

(9) جب آٹا 1 کلوگرام فی روپیہ تھا تو 1.5 ہیکٹوگرام وزن کی روٹی 30 پیسے میں ملتی تھی۔ اگر آٹے کا نرخ 1.5 کلوگرام فی روپیہ ہو جائے تو 1.2 ہیکٹوگرام وزن کی روٹی کتنے میں ملنی چاہیے؟

(10) ایک کام 12 دن میں ختم کرنے کے لیے 50 آدمیوں کو 8 گھنٹے روزانہ کام کرنا پڑتا ہے۔ کتنے گھنٹے روزانہ کام کرنے سے یہی کام 60 آدمی 16 دن میں ختم کر سکیں گے؟

(11) ایک سکاوٹ کیمپ میں 200 سکاؤٹوں کی شرکت کا پروگرام تھا۔ ان کے لیے $7\frac{1}{2}$ ہیکٹوگرام فی کس روزانہ کے حساب سے 12 دن کی خوراک کا انتظام کیا گیا، لیکن وہی خوراک 6 ہیکٹوگرام فی کس روزانہ کے حساب سے 20 دن تک کے لیے کافی رہی۔ بتائیے کہ دراصل کتنے سکاوٹ اس کیمپ میں پہنچے؟

(12) 126 آدمیوں کے پاس 8 ہیکٹوگرام فی آدمی روزانہ کے حساب سے 66 دن کی خوراک موجود ہے۔ اگر 10 دن کے بعد 18 آدمی اور آ جائیں تو بتائیے کہ ہر ایک کو روزانہ کتنی خوراک دی جائے کہ باقی خوراک وقتِ معینہ پر ختم ہو۔

(13) ایک ٹھیکیدار نے 20 کلومیٹر لمبی سڑک 75 دن میں تیار کرنے کا ٹھیکہ لیا۔ اُس نے 200 آدمی کام پر لگائے۔ 45 دن میں صرف 8 کلومیٹر لمبی سڑک تیار

ہوئی۔ وہ کتنے آدمی اور لگائے کہ کام وقت مقررّہ پر ختم ہو جائے ؟

(14) ایک ٹھیکیدار نے ایک عمارت 45 دن میں بنوانے کا ٹھیکہ لیا اور اُس کام پر اُس نے 36 آدمی لگائے۔ 25 دن میں کام کا صرف $\frac{1}{3}$ حصّہ ختم ہو سکا۔ بتائیے کہ وہ کتنے آدمی مزید لگائے کہ کام وقت مقررّہ پر ختم ہو جائے۔

(15) ایک ٹھیکیدار نے ایک پُل 15 دن میں بنوانے کا ٹھیکہ لیا اور 10 آدمی کام پر لگائے۔ 5 دن میں صرف $\frac{1}{4}$ حصّہ کام ختم ہوا۔ کتنے آدمی اور لگائے کہ کام وقت پر مکمّل ہو جائے ؟

4.6 مسلسل نسبت

بعض اوقات دو سے زیادہ مقداروں کا باہم مقابلہ یا موازنہ کرنا پڑتا ہے۔ مثلاً اکبر، انور اور اصغر کچھ روپے لگا کر کاروبار شروع کرتے ہیں۔ اکبر اور انور کے سرمایوں میں نسبت 2:1 ہے اور انور اور اصغر کے سرمایوں میں نسبت 3:2 ہے۔ چنانچہ ان کے سرمایوں میں مندرجہ ذیل نسبتیں ہیں :

اکبر : انور   انور : اصغر

2 : 1   3 : 2

یا اکبر : انور : اصغر

2 : 1 :

3 : 2

اس نتیجے کو مختصر طور پر ذیل کے طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں :

اکبر : انور : اصغر

3 : 2 : 1

اس طرح کے مقابلہ یا موازنہ کو مسلسل نسبت کہتے ہیں۔ اس کی مدد سے اکبر، انور اور اصغر میں سے کوئی سے دو اشخاص کے سرمایوں کی نسبت آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

مثلاً اصغر اور اکبر کے سرمایوں کی نسبت 3 : 1 ہوگی۔

مثال 1 : اشرف اور زاہد کے کھلونوں کی تعداد میں 5 ، 6 کی نسبت ہے جب کہ اشرف اور اکرم کے کھلونوں کی تعداد میں 5 ، 7 کی نسبت ہے۔ تینوں کے کھلونوں کی تعداد میں مسلسل نسبت معلوم کیجیے۔

حل : اشرف : زاہد : اکرم

6 : 5

7 : 5

7 : 6 : 5

مثال 2 : کلیم اور سلیم کی عمروں میں 2 ، 3 کی نسبت ہے جبکہ سلیم اور حلیم کی عمروں میں 4 ، 5 کی نسبت ہے۔ کلیم ، سلیم اور حلیم کی عمروں میں مسلسل نسبت معلوم کریں۔

وضاحت : کلیم : سلیم : حلیم

3 : 2

5 : 4

: ؟ :

$$\frac{\text{کلیم کی عمر}}{\text{سلیم کی عمر}} = \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{\text{سلیم کی عمر}}{\text{حلیم کی عمر}} = \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{3 \times 5} = \frac{12}{15}$$

یعنی نسبت 3:2 مترادف ہے 12:8 کے۔

اور نسبت 5:4 مترادف ہے 15:12 کے۔

اس لیے کلیم : سلیم : حلیم

12 : 8

15 : 12

15 : 12 : 8

مسلسل نسبت معلوم کرنے کے لیے ہر دو نسبتوں میں ایک رکن کا مشترک ہونا لازمی ہے۔ اس مشترک رکن کی ایسی قیمت لی جاتی ہے، جو دی ہوئی ہر دو نسبتوں کے اس رکن کی (دی ہوئی دونوں) قیمتوں پر پوری پوری تقسیم ہو جائے، تاکہ باقی ارکان کی متناظرہ قیمتیں آسانی سے معلوم کی جا سکیں۔ یہ قیمت عموماً دونوں قیمتوں کا ذواضعاف اقل ہوتا ہے۔ اُوپر کی مثال میں سلیم کی عمر مشترک ہے۔ یہ پہلی نسبت میں 3 اور دوسری نسبت میں 4 ہے۔ 3 اور 4 کا ذواضعاف اقل 12 ہے۔ چنانچہ مناسب قیمت 12 ہے، جو 3، 4 دونوں پر تقسیم ہو جاتی ہے۔ اس لیے سلیم کی عمر 12 لی گئی ہے اور اس کے مطابق کلیم اور حلیم کی عمریں مترادف نسبتوں (کسروں) کے اصول سے معلوم کر لی گئی ہیں۔ چنانچہ مثال 2 کا حل یوں ہوگا:

حل: کلیم : سلیم : حلیم

3 : 2

5 : 4

$3\times5 : 3\times4 : 4\times2$

یعنی 8 : 12 : 15

یا کلیم : سلیم : حلیم

3 : 2

5 : 4

15 : 12 : 8

نوٹ: اس طریقے کو N طریقہ کہتے ہیں۔ کیونکہ تیروں کے نشان سے N حرف بن جاتا ہے۔

مثال 3: کبیر، صغیر اور منیر میں 690 روپے اس طرح تقسیم کیجیے کہ کبیر اور صغیر کے حصوں میں 3، 2 کی نسبت ہو اور کبیر اور منیر کے حصوں میں 3، 4 کی نسبت ہو۔

حل: کبیر، صغیر، منیر

3 : 2

4 : 3

$2\times4 : 3\times3 : 3\times2$

یعنی 6 : 9 : 8

یا صغیر، کبیر، منیر

2 : 3

4 : 3

8 : 6 : 9

نسبتی مجموعہ = 6+9+8 = 23

قابلِ تقسیم رقم = 690 روپے

پس کبیر کا حصّہ = $\frac{6}{23} \times 690 = 180$ روپے

صغیر کا حصّہ = $\frac{9}{23} \times 690 = 270$ روپے

منیر کا حصّہ = $\frac{8}{23} \times 690 = 240$ روپے

مشق 4.4

ا : ب : ج معلوم کیجیے جبکہ :

(1) ا : ب = 2 : 3 ، ب : ج = 3 : 4

(2) ا : ب = 1 : 4 ، ب : ج = 4 : 6

(3) ا : ب = 2 : 3 ، ا : ج = 2 : 5

(4) ا : ج = 2 : 6 ، ب : ج = 3 : 6

(5) ا : ب = 4 : 5 ، ج : ب = 6 : 5

(6) ا : ب = 1 : 3 ، ب : ج = 6 : 7

(7) ا : ب = 3 : 4 ، ب : ج = 5 : 6

(8) ا : ب = 2 : 3 ، ا : ج = 5 : 4

(9) ا : ج = 1 : 2 ، ب : ج = 2 : 3

(10) ب : ج = 3 : 4 ، ج : ا = 3 : 4

(11) 558 روپے افضل ، اکرم اور اشرف میں اس طرح تقسیم کیجیے کہ افضل اور اکرم کے حصّوں میں 3، 5 کی نسبت ہو اور اکرم اور اشرف کے حصّے 4، 6 کی نسبت میں ہوں۔

(12) 289 روپے کی مزدوری ا ، ب اور ج میں اس طرح تقسیم کریں کہ ا : ب = 1:2 اور ب : ج = 3:4

(13) سلیمان ، رمضان اور سلطان کے پاس 440 بھیڑیں ہیں ۔ سلیمان اور رمضان کی بھیڑیں کی تعداد میں 6،11 کی نسبت ہے جبکہ سلیمان اور سلطان کی بھیڑوں کی تعداد میں 4،7 کی نسبت ہے ۔ بتائیے ہر ایک کے پاس کتنی کتنی بھیڑیں ہیں ۔

(14) طاہر، جمیل اور اقبال نے 887 روپے 50 پیسے کا منافع آپس میں اس طرح بانٹا کہ اگر طاہر کو 5 روپے ملے تو جمیل کو 6 روپے اور اگر جمیل کو 8 روپے ملے تو اقبال کو 9 روپے ملے ۔ ہر ایک کو کیا ملا ؟

(15) عبدالجبار ، محمد دین اور حق نواز نے سیلاب فنڈ میں کل 127 روپے 50 پیسے چندہ دیا ۔ عبدالجبار اور حق نواز کی رقموں میں 3، 4 کی نسبت تھی جب کہ حق نواز اور محمد دین کی رقموں میں 5، 4 کی نسبت تھی ۔ ہر ایک کا چندہ معلوم کیجیے ۔

باب 5

جبری جُملے، کُلّیات و اجزائے ضربی

5.1 جبری جملوں کی جمع و تفریق (اعادہ)

آپ ساتویں جماعت میں جبری جملوں پر چار بنیادی عوامل (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کا استعمال پڑھ چکے ہیں۔ ان عوامل کی مدد سے ہم جبری جملوں کو مختصر کر سکتے ہیں۔ آپ کو معلوم ہے کہ جبری جملوں کو جمع کرنے کے لیے ہم قسم یا ایک ہی طرح کی رقموں کے سروں کو جمع کیا جاتا ہے اور حاصل جمع اُن رقموں کے مشترک جبری اجزا سے پہلے لکھ دیا جاتا ہے۔ اگر رقمیں ایک طرح کی نہ ہوں تو انھیں جمع نہیں کیا جا سکتا۔ ایسی رقموں کو جمع کرنے کے لیے اُن کے درمیان علامت '+' لکھ دی جاتی ہے۔ تفریق جمع کا معکوس عمل ہے۔

مثال 1: 3 ا ب + 5 ب ج – 15، 3 ج ا – 4 ا ب + ب ج، 16 ا ب – 13 ج ا + 12 کو جمع کریں۔

حل: پہلا طریقہ

3 ا ب + 5 ب ج + 0 ج ا – 15
– 4 ا ب + ب ج + 3 ج ا + 0
16 ا ب + 0 ب ج – 13 ج ا + 12
―――――――――――――
15 ا ب + 6 ب ج – 10 ج ا – 3

وضاحت: جملوں کی ہم قسم رقمیں ایک ہی کالم میں لکھی گئی ہیں۔ پہلے جملے میں ج ا موجود نہیں اس لیے وہاں 0 ج ا لکھا اور اس سے جملہ تبدیل نہیں ہوتا۔ دوسرے جملے میں مطلق رقم صفر ہے اور تیسرے میں 0 ب ج۔ اب ہر کالم کی رقموں کے عددی سروں کو جمع کیا (جملوں کی رقموں کی ترتیب حسبِ ضرورت تبدیل کی جا سکتی ہے۔ اس میں جمع کی خاصیتِ مبادلہ کا استعمال ہوتا ہے)۔

دوسرا طریقہ:

ان جملوں کو ہم مندرجہ ذیل طریقے سے بھی جمع کر سکتے ہیں۔ عملی کام میں زیادہ تر یہی طریقہ استعمال ہوتا ہے۔

دیے ہوئے جملوں کا حاصل جمع :

= پہلا جملہ + دوسرا جملہ + تیسرا جملہ

= (3 اب + 5 ب ج – 15) + (3 ج ا – 4 اب + ب ج) + (16 اب – 13 ج ا + 12)

= 3 اب + 5 ب ج – 15 + 3 ج ا – 4 اب + ب ج + 16 اب – 13 ج ا

(جمع کی خاصیت تلازم سے)

= 3 اب – 4 اب + 16 اب + 5 ب ج + ب ج + 3 ج ا – 13 ج ا – 15 + 12

(جمع کی خاصیت مبادلہ سے)

= (3 – 4 + 16) اب + (5 + 1) ب ج + (3 – 13) ج ا – 3

(ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع سے)

= 15 اب + 6 ب ج – 10 ج ا – 3

مثال 2 : 12 ا + 4 ا^2 – 2 اب + 3 ب – 7 ب^2 کو 5 ا^2 + اب – 3 ب^2 + 8 ا – 5 ب میں سے تفریق کریں۔

پہلا طریقہ :

حل : پہلے دونوں جملوں کو ترتیب نزولی بلحاظ ا اور ترتیب صعودی بلحاظ ب لکھیں۔ اس طرح

پہلا جملہ = 4 ا^2 + 12 ا – 2 اب + 3 ب – 7 ب^2

دوسرا جملہ = 5 ا^2 + 8 ا + اب – 5 ب – 3 ب^2

تفریق کرنے کے لیے پہلے جملے کو دوسرے جملے کے نیچے اس طرح لکھیں کہ ہم قسم رقمیں ایک کالم میں واقع ہوں۔ نیچے والی رقموں کی علامات تبدیل کریں، اور پھر ہم قسم رقموں کے عددی سر جمع کریں۔ اب عمل یوں ہو گا۔

5 ا^2 + 8 ا + اب – 5 ب – 3 ب^2

4 ا^2 + 12 ا – 2 اب + 3 ب – 7 ب^2

–   –   +   –   +

ا^2 + 6 ا + 3 اب – 8 ب + 4 ب^2

دوسرا طریقہ:

عملی کام میں تفریق کا عمل یوں کیا جائے گا،

(5ا^2 + اب − 3ب^2 + 8ا − 5ب) − (2ا + 4ا^2 − 2اب + 3ب − 7ب^2)

= 5ا^2 + اب − 3ب^2 + 8ا − 5ب − 2ا − 4ا^2 + 2اب − 3ب + 7ب^2

(خاصیت تلازم سے اور جس بریکٹ کے باہر علامت "−" ہے اس کے اندر تمام رقموں کی علامتیں تبدیل کرنے سے)

= 5ا^2 − 4ا^2 + اب + 2اب − 3ب^2 + 7ب^2 + 8ا − 2ا − 5ب − 3ب

(خاصیت مبادلہ سے)

= (5 − 4)ا^2 + (1 + 2)اب + (−3 + 7)ب^2 + (8 − 2)ا + (−5 − 3)ب

(خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع سے)

= ا^2 + 3اب + 4ب^2 + 6ا − 8ب

= ا^2 + 6ا + 3اب − 8ب + 4ب^2 (خاصیت مبادلہ سے)

مشق 5.1

مثال میں دیے ہوئے دونوں طریقوں سے جمع کریں:

(1) 7ا + ب + 3ج ، 5ب − 2ا + ج

(2) 3اب + 2بج + 5 ، 2جا − 5اب − 15

(3) 6ا^2 + 7ا + 12 ، 2ا^2 − ا + 1

(4) 12ا^3 − 3ا^{2}ب + 5اب^2 − 7ب^3 ، 9ا^3 + 11ب^3 ، 2ا^{2}ب − ا^3 + 13اب^2 − ب^3

(5) الا^2 + ب لا + ج ، م لا^2 + ن لا + ی

مثال میں دیے ہوئے دونوں طریقوں سے پہلے جملے میں سے دوسرے جملے کو تفریق کریں:

(6) 7ا − 2ب ، 3ا − 6ب

(7) اب^2 + بج^2 + جر^2 ، 3اب^2 + 2بج^2 + 7جر^2

(8) الا^3 + ب لا^2 + ج لا + د ، ر لا^3 + س لا^2 + م لا + ن

(9) ا^{2}ب + $\frac{3}{2}$ب^3 − 5اب^2 + 15 میں کیا جمع کیا جائے کہ جواب 7ا^{2}ب + ب^3 + ب + 1 آئے۔

(10) اگر $\text{لا} = \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + 3$

$\text{ما} = 5\text{ا} - 3\text{ب} + 2\text{ج} + 1$

$\text{یا} = 3\text{ا} + 7\text{ب} - 10\text{ج} - 15$

تو $\text{لا} + \text{ما} - \text{یا}$ کی قیمت معلوم کریں۔

5.2 جبری جملوں کی ضرب و تقسیم (اعادہ)

دو جبری جملوں کی آپس میں ضرب کے لیے ایک جملے کی ہر رقم سے دوسرے جملے کی ہر رقم کو ضرب دی جاتی ہے اور پھر ان سب کو جمع کیا جاتا ہے۔ دو رقموں کی ضرب میں ایک ہی متغیر کی مختلف طاقتیں ضرب دیتے وقت جمع ہو جاتی ہیں اور سروں کو ایک دوسرے سے ضرب دی جاتی ہے۔ جن دو رقموں کو آپس میں ضرب دی جائے اگر وہ دونوں ایک ہی علامت کی ہوں تو حاصل ضرب کی علامت "+" ہوگی۔ بصورت دیگر حاصل ضرب کی علامت "−" ہوگی۔

مثال 1 : $\text{ا}^2 + 3\text{ا} + 5$ کو $\text{ا} - 3$ سے ضرب دیں۔

حل :

$$\text{ا}^2 + 3\text{ا} + 5$$
$$\text{ا} - 3$$
$$\text{ا}^3 + 3\text{ا}^2 + 5\text{ا}$$
$$-3\text{ا}^2 - 9\text{ا} - 15$$
$$\text{ا}^3 - 4\text{ا} - 15$$

مثال 2: $-\text{ا}^4\text{ب} + 2\text{ا}^5 + 3\text{ا}^2\text{ب}^2$ کو $\text{ا} + \text{ب}$ سے ضرب دیں۔

حل : دیے ہوئے جملوں کو ترتیب نزولی بلحاظ ا اور ترتیب صعودی بلحاظ ب سے لکھ کر ہم ضرب کا عمل کریں گے۔

$$2\text{ا}^5 - \text{ا}^4\text{ب} + 3\text{ا}^2\text{ب}^2$$
$$\text{ا} + \text{ب}$$
$$2\text{ا}^6 - \text{ا}^5\text{ب} + 3\text{ا}^3\text{ب}^2$$
$$+ 2\text{ا}^5\text{ب} - \text{ا}^4\text{ب}^2 + 3\text{ا}^2\text{ب}^3$$
$$2\text{ا}^6 + \text{ا}^5\text{ب} + 3\text{ا}^3\text{ب}^2 - \text{ا}^4\text{ب}^2 + 3\text{ا}^2\text{ب}^3$$

ضرب کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں صرف دو رقمیں ہم قسم ہیں۔ ان کو جمع کیا باقی تمام رقموں کو ان کی علامتوں کے ساتھ اسی طرح لکھ دیا گیا ہے۔

مثال 3 : $ا^2 + 4ا + 2$ کو $ا + 2$ سے تقسیم کریں جبکہ $ا + 2 \neq 0$

حل : مقسوم اور مقسوم علیہ کو ایک ہی ترتیب (نزولی یا صعودی) میں لکھ کر تقسیم کا عمل کرنا چاہیے۔ نزولی ترتیب میں عمل یوں ہوگا۔

$$ا + 2$$

$$ا + 2 \,\big)\, ا^2 + 4ا + 4$$

$$ا^2 + 2ا$$

$$- \quad -$$

$$2ا + 4$$

$$2ا + 4$$

$$- \quad -$$

$$0$$

حاصل قسمت $= ا + 2$

واضح رہے کہ تقسیم کے تمام سوالات میں مقسوم علیہ غیر صفر رقم ہوتی ہے۔

مثال 4 : $3ا^3 - 4ا^2ب - اب^2 + 2ب^3$ کو $ا - ب$ سے تقسیم کریں۔

حل :

$$3ا^2 - اب - 2ب^2$$

$$ا - ب \,\big)\, 3ا^3 - 4ا^2ب - اب^2 + 2ب^3$$

$$3ا^3 - 3ا^2ب$$

$$- \quad +$$

$$-ا^2ب - اب^2 + 2ب^3$$

$$-ا^2ب + اب^2$$

$$+ \quad -$$

$$-2اب^2 + 2ب^3$$

$$-2اب^2 + 2ب^3$$

$$+ \quad -$$

$$0$$

حاصل قسمت $= 3ا^2 - اب - 2ب^2$

مشق 5.2

ضرب دیں :

(1) ا + ب ، ج + د

(2) 2ا + ب − ج ، 4ا + 3ب + 2ج

(3) ا^{4} + ا^{3} + ا^{2} + ا + 1 ، ا − 1

(4) ا^{4} + ا^{3}ب − ا^{2}ب^{2} − اب^{3} + ب^{4} ، ا + ب

(5) ا^{2}ب^{2} − اب ج + 2اب^{2} + ا^{2}ب^{2}ج^{2} ، اب + ج

(6) ا^{2} + 4ب^{2} + ج^{2} − 2اب + 2ب ج + ج ا ، ا − ج

تقسیم کریں :

(7) ا^{3} + ب^{3} کو ا + ب سے

(8) ا^{4} + ا^{2}ب^{2} + ب^{4} کو ا^{2} + اب + ب^{2} سے

(9) ا^{2} − 6اب − 5ا + 15ب + 9ب^{2} کو 3ب − ا + 5 سے

(10) ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − 3اب ج کو ا + ب + ج سے

5.3 بریکٹ (خطوط وحدانی)

جبری جملوں میں مختلف رقموں کی گروہ بندی کے لیے بریکٹ (خطوط وحدانی) استعمال کیے جاتے ہیں۔ بعض اوقات ایک ہی جبری جملے میں مختلف قسم کے بریکٹ، جن کی تفصیل اور ترتیب حسب ذیل ہے، استعمال کیے جاتے ہیں۔

(i) قطعہ خط —

(ii) چھوٹی بریکٹ ( )

(iii) درمیانی بریکٹ { }

(iv) بڑی بریکٹ [ ]

اگر بریکٹ کے باہر + کی علامت ہو تو بریکٹ کو موقوف کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً ا + (ب + ج) = ا + ب + ج یا ا + (ب − ج) = ا + ب − ج

اگر بریکٹ کے باہر"–" کی علامت ہو تو بریکٹ ختم کرنے کے لیے اُس کے اندر موجود تمام رقموں کی علامتیں تبدیل کر دی جاتی ہیں۔

مثلاً ا – (ب + ج) = ا – ب – ج اور ا – (ب – ج) = ا – ب + ج

اگر دو بریکٹوں کے درمیان کوئی علامت (+، –، یا ÷) نہ ہو تو اُس سے مراد دونوں جملوں کی آپس میں ضرب ہوگی۔ مثلاً

(ا + ب) (ج + د) کا مطلب ہے ا + ب اور ج + د کو آپس میں ضرب دینا۔

اگر کسی جبری جملے میں مختلف قسم کے بریکٹ ہوں تو اُس جملے کو مختصر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تمام بریکٹ ختم کیے جائیں۔ بریکٹ حسب ذیل ترتیب میں ختم کیے جاتے ہیں۔

(i) قطعہ خط

(ii) چھوٹی بریکٹ

(iii) درمیانی بریکٹ

(iv) بڑی بریکٹ

مثلاً ا – [ب – {ج – (د – $\overline{\text{ر – س}}$) }] کو مختصر کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم قطعہ خط موقوف کریں گے۔ پس

جملہ = ا – [ب – {ج – (د – ر + س) }] (قطعہ خط ختم کرنے سے)

= ا – [ب – {ج – د + ر – س}] (چھوٹی بریکٹ ختم کرنے سے)

= ا – [ب – ج + د – ر + س] (درمیانی بریکٹ ختم کرنے سے)

= ا – ب + ج – د + ر – س (بڑی بریکٹ ختم کرنے سے)

مثال 1 (ا^3 – ب^3) – (5ب^3 – 4ا^3) کو مختصر کریں۔

حل: جملہ = ا^3 – ب^3 – 5ب^3 + 4ا^3

پہلی بریکٹ کے باہر "+" کی علامت ہے اس لیے اسے نظر انداز کیا۔ دوسری بریکٹ کے باہر علامت "–" ہے اس لیے بریکٹ ختم کرنے کے لیے تمام رقموں کی علامتیں تبدیل کریں۔

جملہ = 5ا^3 – 6ب^3

مثال 2 : (ا + ب + ج) − (2ا − ب − ج) − (5ج − ا + ب) (ا + ب پر خط)

حل : جملہ = (ا + ب + ج) − (2ا − ب − ج) − (5ج − ا − ب)

= ا + ب + ج − 2ا + ب + ج − 5ج + ا + ب

= (ا − 2ا + ا) + (ب + ب + ب) + (ج + ج − 5ج)

= 3ب − 3ج

مثال 3 : 2ا − 2 [2ا − 2{2ا − 2 (2ا − ب) − ب}] کو مختصر کریں۔

حل : جملہ = 2ا − 2 [2ا − 2 {2ا − 4ا + 2ب − ب}]

= 2ا − 2 [2ا − 2 {− 2ا + ب}]

= 2ا − 2 [2ا + 4ا − 2ب]

= 2ا − 2 [6ا − 2ب]

= 2ا − 12ا + 4ب

= 4ب − 10ا

مثال 4 : ا − ب + ج − 2د − س میں آخری تین مقداروں کو بریکٹ میں اس طرح اکٹھا کریں کہ بریکٹ کے باہر علامت "−" ہو۔

حل : جملہ = ا − ب + (ج − 2د − س)

(بریکٹ کے باہر "+" کی علامت ہے۔ اس لیے یہ بریکٹ لگانے سے جملہ کی قیمت تبدیل نہیں ہوئی۔)

= ا − ب − (2د + س − ج)

(بریکٹ کے باہر علامت "−" لانے سے اس کے اندر موجود تمام رقموں کی علامتیں بدل گئیں)۔

مثال 5 : الا − ب لا + اما − ب ما + ای − ب ی میں ایسی رقموں کی بریکٹ میں گروہ بندی کریں جن کے سر برابر ہوں۔

حل : جملہ = (الا + اما + ای) + (− ب لا − ب ما − ب ی)

= (الا + اما + ای) − (ب لا + ب ما + ب ی)

= ا (لا + ما + ی) − ب (لا + ما + ی)

(ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع سے)

= (لا + ما + ی) (ا − ب)

مشق 5.3

مختصر کریں:

(1) (ا + ب) − (ا − ب)

(2) − (ا − ب) − (ب − ج) − (ج − ا)

(3) (ا^2 + ب^2 + ج^2) − (ا^2 − 3 ب^2 + 2ج^2) − (ب^2 + 3ج^2 − 2ا^2)

(4) ا^2 − (اب − ب ج + ج ا) + ب^2 − (ب ج − ج ا + اب) + ج^2 − (ج ا − اب + ب ج)

(5) ا − [7 ب − {2ا − (3ب − 5ج) + 3 ج − (ا − 2ب − ج)}]

(6) (ا^2 − ب^2 + ج^2) + (ب^2 − ج^2 + 2ا^2) − (ج^2 − ا^2 + 2ب^2)

(7) [ا + {ب + (ج + د)}] + [ا − {ب − (ج − د)}]

(8) [ا − {ب − (ج − د)}] + [ب − {ج − (د − ا)}]

(9) 1 − (2 − ا) − {3 − (ا − ا^2)} − [4 − {ا − (ا^2 − ا^3)}]

(10) ا − [ا − 3ب + {2ج − ب − (ا − 2ب + ج)}]

بریکٹوں میں رقمیں اس طرح اکٹھی کریں کہ بریکٹ کے اندر موجود ہر رقم کی علامت "+" ہو۔

(11) ا^3 − 3ا^{2}ب − 3اب^2 + ب^3

(12) ا^2 − اب − ب ج + ج ا − ب^2 + ج^2

(13) ا^2 − ب ج + ب^2 − ج ا + ج^2 − اب

(14) ا^2 − 2 اب + ب^2 − ج^2 + 2ج د − د^2

(15) ا^{4} − 8ا^{3} + 16ا^{2} − 5 (ا^{2} − 4ا) − 1

برابر سروں والی رقمیں بریکٹ میں اکٹھی کریں۔

(16) الا + ب ما + اما + ب لا

(17) الا^{4} + الا^{3} − ب لا^{4} − ب لا^{3}

(18) الاما + ب مای − ج لای + الا^{2} + ب ما^{2} − ج ی^{2}

(19) الا^{3} − 2اب لاما + ب لا^{3} − 2اب لا^{2} − 2اب ما^{2}

(20) ا^{3} لا^{3} − 3ا^{2} لا^{2} ب ما − 3الاب^{2} ما^{2} + ا^{3} ما^{3}

5.4 جبری جملوں کی قیمتیں:

آپ پڑھ چکے ہیں کہ الجبرا میں مقداریں ظاہر کرنے کے لیے متغیرات کو حروفِ تہجّی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر کسی جبری جملہ میں استعمال ہونے والے حروف کو ان کے ڈومین سیٹ میں دیے ہوئے کسی رکن سے تبدیل کیا جائے تو حاصل جواب ایک عدد ہوگا۔ جسے جملہ کی قیمت کہا جائے گا۔ اب ہم اس طریقے سے جبری جملوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے متعلق پڑھیں گے۔

مثال 1: اگر ا = 2 تو 3ا + 1 اور ا^{2} + 2ا + 1 کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: جب ا = 2 تو 3ا + 1 = $3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

اور ا^{2} + 2ا + 1 = $(2)^{2} + 2 \times 2 + 1$

$= 4 + 4 + 1$

$= 9$

مثال 2: اگر ا = 2 ، ب = 3 ، ج = 4 تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں دریافت کریں۔

(i) 2ا + 3ب − ج

(ii) اب + ب ج + ج ا

(iii) ا^{2}ب + ب^{2}ج + ج^{2}ا

حل: جملوں میں قیمتیں رکھنے سے

(i) جملہ = $2 \times 2 + 3 \times 3 - 4$

$= 4 + 9 - 4$

$= 9$

(ii) جملہ = $2\times4+4\times3+3\times2$

$8+12+6=$

$26=$

(iii) جملہ = $2\times{}^{2}4+4\times{}^{2}3+3\times{}^{2}2$

$32+36+12=$

$80=$

مثال 3 : $ا^2-5ا+6$ کی قیمتیں معلوم کریں جب کہ ا = 0، 1، −1، 4

حل : ا = 0 تو جملہ = $6=6+0-0$

ا = 1 تو جملہ = $6+1\times5-{}^{2}1$

$2=6+5-1=$

ا = −1 تو جملہ = $6+(1-)5-{}^{2}(1-)$

$6+5+1=$

$12=$

ا = 4 تو جملہ = $6+4\times5-{}^{2}4$

$6+20-16=$

$2=$

مثال 4 : اگر ا = 2، ب = 4 اور ج = 6 تو $\frac{ا^2ب}{ج}+\frac{ب^2ج}{ا}+\frac{ج^2ا}{ب}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل : ا، ب اور ج کی دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے

جملہ = $\frac{2\times{}^{2}6}{4}+\frac{6\times{}^{2}4}{2}+\frac{4\times{}^{2}2}{6}$

$\frac{2\times36}{4}+\frac{6\times16}{2}+\frac{4\times4}{6}=$

$18+48+\frac{8}{3}=$

$66+2\frac{2}{3}=$

$68\frac{2}{3}=$

مثال 5 : اگر کسی دائرہ کا رداس "د" اکائیاں ہو تو اُس کے علاقہ کا رقبہ = π د^2 مربع اکائیاں

جبکہ $\pi = \frac{22}{7}$

(i) دائروی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جبکہ دائرہ کا رداس 7 سم ہے۔

(ii) ایک دائروی علاقہ کا رقبہ $78\frac{4}{7}$ مربع میٹر ہے۔ دائرہ کا رداس معلوم کریں۔

حل : **(i)** دائرہ کا رداس = 7 سم

دائروی علاقہ کا رقبہ = $\pi \times 7^2$ مربع سم

= $\frac{22}{7} \times 49$ مربع سم = 154 مربع سم

(ii) آپ کو معلوم ہے کہ کسی دائروی علاقہ کا رقبہ π د^2 مربع اکائیاں ہوتا ہے جبکہ متعلقہ دائرہ کا رداس "د" اکائیاں ہو۔

پس π د^2 = $78\frac{4}{7}$ مربع میٹر

یا د^2 = $\frac{550}{7} \times \frac{1}{\pi}$

= $\frac{550}{7} \times \frac{1}{\frac{22}{7}}$

= $\frac{550}{7} \times \frac{7}{22} = 25$

پس د = $\sqrt{25}$ = 5 میٹر

مثال 6 : پہلے 'ن' قدرتی اعداد کا مجموعہ یعنی 1 + 2 + 3 + ⋯ + ن = $\frac{ن\,(ن + 1)}{2}$ ہے۔
اس کلیہ کی مدد سے

(i) پہلے 15 قدرتی اعداد
(ii) پہلے 99 قدرتی اعداد
} کا مجموعہ معلوم کریں۔

حل : **(i)** پہلے 15 قدرتی اعداد کا مجموعہ = 1 + 2 + 3 + ⋯ + 15

$= \frac{15(15 + 1)}{2}$ (کلیہ میں ن کی قیمت 15 رکھنے سے)

$= \frac{15 \times 16}{2}$

$= 15 \times 8$

$= 120$

پہلے 99 قدرتی اعداد کا مجموعہ $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$

$$= \frac{(1+99)\,99}{2}$$

$$= \frac{100 \times 99}{2}$$

$$= 4950$$

مشق 5.4

(1) اگر ا = 1، ب = 3، ج = 5 تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) ا^{2}ب ج

(ii) $\dfrac{\text{اب}^2}{3\text{ج}^2}$

(iii) $\dfrac{\text{اب}}{\text{ج}}$

(iv) $\dfrac{\text{ا}}{\text{ب}} + \dfrac{\text{ب}}{\text{ج}} + \dfrac{\text{ج}}{\text{ا}}$

(v) $\dfrac{\text{اب}}{\text{ج}} + \dfrac{\text{ب ج}}{\text{ا}} + \dfrac{\text{ج ا}}{\text{ب}}$

(vi) $\dfrac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \dfrac{\text{ب}^2}{\text{ج}^2} + \dfrac{\text{ج}^2}{\text{ا}^2}$

(vii) (ا − ب)^2 + (ا + ب)^2

(viii) (ب + ج)^2 − (ب − ج)^2

(ix) (ا + ب)^2 + (ب + ج)^2 + (ج + ا)^2

(x) $\dfrac{(\text{ا} + \text{ب})^3}{(\text{ب} + \text{ج})^3} + \dfrac{(\text{ب} + \text{ج})^3}{(\text{ج} + \text{ا})^3} + \dfrac{(\text{ج} + \text{ا})^3}{(\text{ا} + \text{ب})^3}$

(xi) ا^3 + ب^3 + ج^3 − 3ا ب ج

(xii) (ا − ب + ج)^2 + (ب − ج + ا)^2 + (ج − ا + ب)^2

(2) 2ا^2 − 7ا + 12 کی قیمتیں معلوم کریں اگر ا = 0، 1، 2، 5، 9

(3) 2ا^2 + 5ا + 1 کی قیمتیں معلوم کریں اگر ا = −1، −2، −3، −4

(4) 6ا^2 − 15ا − 21 کی قیمتیں معلوم کریں اگر ا = −1، −2، 0، 1، 2

(5) مثال 6 میں دیے ہوئے کلیہ کی مدد سے پہلے 1000 قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔

(6) ایک مستطیل کھیت کا احاطہ 100 میٹر ہے۔ اگر کھیت کی لمبائی 30 میٹر ہو تو اس کا رقبہ معلوم کریں۔

(7) ایک مثلث کے قاعدہ کی لمبائی 5 سم اور عمود کی لمبائی 3 سم ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

[مثلثی علاقہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ ق ع مربّع اکائیاں

جبکہ ق = مثلث کے قاعدہ کی لمبائی

ع = مثلث کے عمود کی لمبائی]

(8) ایک مثلثی علاقہ کا رقبہ 20 مربّع میٹر ہے۔ اگر اس کے قاعدہ کی لمبائی 10 میٹر ہو تو عمود کی لمبائی معلوم کریں۔

(9) اگر کرّہ کا رداس "د" اکائیاں ہو تو اس کی سطح کا رقبہ $= 4\pi \text{د}^2$ مربّع اکائیاں

ایک کرّہ کی سطح کا رقبہ 100π مربّع میٹر ہے۔ اس کا رداس معلوم کریں۔

(10) اگر $\text{ا} = 3$ ہو تو $4\text{ا} - [2\text{ا} - \{\text{ا} - (5\text{ا} - \overline{3\text{ا} + 2})\}]$ کی قیمت معلوم کریں۔

(11) $(\text{ا}^3 + \text{ب}^3) \div (\text{ا} + \text{ب}) + (\text{ا}^3 - \text{ب}^3) \div (\text{ا} - \text{ب})$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\text{ا} = 5$، $\text{ب} = 3$

(12) اگر $\text{ا} = 2$، $\text{ب} = 4$، $\text{ج} = 6$، $\text{د} = 8$ تو مشق 5.3 کے سوالات 1 تا 10 کی قیمتیں معلوم کریں۔

(13) مثلثی علاقہ کا رقبہ $= \sqrt{\text{س}(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})}$ مربّع اکائیاں

جبکہ $\text{س} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{2}$ اور ا، ب، ج مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 15 میٹر، 12 میٹر اور 9 میٹر ہیں۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

(14) پہلے "ن" قدرتی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ یعنی $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + \text{ن}^2$

$= \frac{\text{ن}(\text{ن} + 1)(2\text{ن} + 1)}{6}$ ہے۔

پہلے 35 قدرتی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ معلوم کریں۔

(15) اگر $\text{ا} = 5$، $\text{ب} = 3$ تو مندرجہ ذیل میں سے کون سے بیانات درست ہیں اور کون سے غلط؟

(i) $\text{ا}^3 + \text{ب}^3 = (\text{ا} + \text{ب})(\text{ا}^2 - \text{اب} + \text{ب}^2)$

(ii) $\text{ا}^3 - \text{ب}^3 = (\text{ا} - \text{ب})^3 + 3\text{اب}(\text{ا} - \text{ب})$

(iii) $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = (\text{ا} + \text{ب})^2$

(iv) $(\text{ا} - \text{ب})^2 = (\text{ا} + \text{ب})^2 - 4\text{اب}$

(v) $(\text{ا} + \text{ب})^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$

(vi) $\dfrac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}} = \text{ا} + \text{ب}$ (vii) $\dfrac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا} - \text{ب}} = \text{ا} - \text{ب}$

(viii) $\dfrac{\text{ا}^3 + \text{ب}^3}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} = \text{ا} + \text{ب}$ (ix) $\text{ا}^2 + \dfrac{1}{\text{ا}^2} = \left(\text{ا} + \dfrac{1}{\text{ا}}\right)^2 - 2$

(x) $\text{ا}^4 + \text{ب}^4 = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2 - 2\text{ا}^2\text{ب}^2$

کُلّیات

الجبرا میں بہت سے ایسے کلیات (فارمولے) ہیں جن کی مدد سے بیشتر سوالات میں ضرب اور تقسیم کا پورا عمل کیے بغیر نتائج لکھے جا سکتے ہیں۔ یہ کلیات اپنی افادیت کی وجہ سے الجبرا میں بنیادی اہمیت کے حامل ہیں۔ بچّوں کو نہ صرف یہ یاد رکھنے چاہئیں بلکہ ان کے استعمال میں بھی مہارت حاصل کرنی چاہیے۔ ہم اس جماعت میں صرف چند آسان اور نہایت ضروری کلیات کا مطالعہ کریں گے۔

5.5 کلیہ 1 : $(\text{ا} + \text{ب})^2 = \text{ا}^2 + 2\text{اب} + \text{ب}^2$

ثبوت : $(\text{ا} + \text{ب})^2 = (\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} + \text{ب})$

$= \text{ا}(\text{ا} + \text{ب}) + \text{ب}(\text{ا} + \text{ب})$

$= \text{ا}^2 + \text{اب} + \text{اب} + \text{ب}^2$

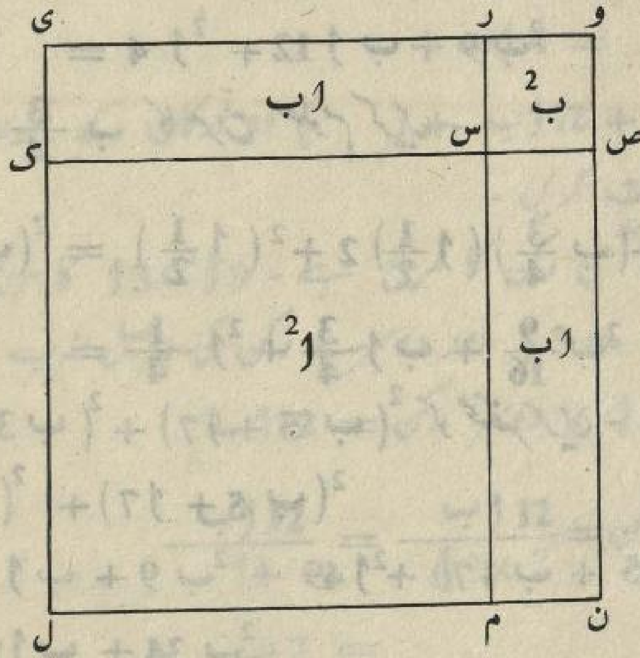
$= \text{ا}^2 + 2\text{اب} + \text{ب}^2$

الفاظ میں اس کلیہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں :

دو ارکان کے مجموعہ کا مربّع =

پہلے رکن کا مربّع + دوسرے رکن کا مربّع + دونوں ارکان کے حاصل ضرب کا دُگنا

جیومیٹری کی مدد سے اس کی تشریح یوں کی جا سکتی ہے ۔



ل م = ا اکائیاں اور م ن = ب اکائیاں لیں ۔

پس ل ن = ا + ب اکائیاں

ل ن پر مربّع ل ن و ی بنائیں ۔

ل م پر مربّع ل م س ک بنائیں ۔

ک س ، ن و کو ص پر ملتا ہے ۔

س ص پر مربّع س ص و ر مکمل کریں ۔

شکل سے صاف ظاہر ہے کہ

علاقہ ل ن و ی کا رقبہ = علاقہ ل م س ک کا رقبہ + علاقہ س ص و ر کا رقبہ + علاقہ م ن ص س کا رقبہ + علاقہ ک س ر ی کا رقبہ

یعنی $(ا + ب)^2 = ا^2 + ب^2 + اب + اب$

$= ا^2 + 2اب + ب^2$

مثال 1 : $\text{ا} + 4$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(\text{ا}+4)^2 = \text{ا}^2 + 2 \times \text{ا} \times 4 + 4^2$

$= \text{ا}^2 + 8\text{ا} + 16$

مثال 2 : $2\text{ا} + 3\text{ب}$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(2\text{ا} + 3\text{ب})^2 = (2\text{ا})^2 + 2(2\text{ا})(3\text{ب}) + (3\text{ب})^2$

$= 4\text{ا}^2 + 12\text{اب} + 9\text{ب}^2$

مثال 3 : $\frac{1}{2}\text{ا} + \frac{3}{4}\text{ب}$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(\frac{1}{2}\text{ا} + \frac{3}{4}\text{ب})^2 = (\frac{1}{2}\text{ا})^2 + 2(\frac{1}{2}\text{ا})(\frac{3}{4}\text{ب}) + (\frac{3}{4}\text{ب})^2$

$= \frac{1}{4}\text{ا}^2 + \frac{3}{4}\text{اب} + \frac{9}{16}\text{ب}^2$

مثال 4 : $(4\text{ا} + 3\text{ب})^2 + (7\text{ا} + 5\text{ب})^2$ کو مختصر کریں۔

حل : $(4\text{ا}+3\text{ب})^2 + (7\text{ا} + 5\text{ب})^2$

$= 16\text{ا}^2 + 24\text{اب} + 9\text{ب}^2 + 49\text{ا}^2 + 70\text{اب} + 25\text{ب}^2$

$= 65\text{ا}^2 + 94\text{اب} + 34\text{ب}^2$

مثال 5 : $(5\text{ا} + 7\text{ب})^2 - (9\text{ا} + 4\text{ب})^2$ کو مختصر کریں۔

حل : جملہ $= 25\text{ا}^2 + 70\text{اب} + 49\text{ب}^2 - (81\text{ا}^2 + 72\text{اب} + 16\text{ب}^2)$

$= 25\text{ا}^2 + 70\text{اب} + 49\text{ب}^2 - 81\text{ا}^2 - 72\text{اب} - 16\text{ب}^2$

$= (25-81)\text{ا}^2 + (70-72)\text{اب} + (49-16)\text{ب}^2$

$= -56\text{ا}^2 - 2\text{اب} + 33\text{ب}^2$

مثال 6 : $(105)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کریں۔

حل : $(105)^2 = (100+5)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2$

$= 10000 + 1000 + 25$

$= 11025$

مثال 7 : اگر ا^2 + (   ) + 4ب^2 دو ارکان کے مجموعہ کا مربع ہو تو نامعلوم رقم دریافت کریں۔

حل : ا^2 اور 4ب^2 بالترتیب ا اور 2ب کے مربعے ہیں۔ نامعلوم رقم ا اور 2ب کے حاصل ضرب کی دو چند ہوگی۔

پس نامعلوم رقم = 2 × ا × 2ب

= 4اب

مثال 8 : اگر 9ا^2 + 12اب + (   ) دو ارکان کے مجموعہ کا مربع ہو تو نامعلوم رقم دریافت کریں۔

حل : نامعلوم رقم کسی رکن کا مربع ہے۔ 9ا^2، 3ا کا مربع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ 12اب = 3ا اور دوسرے رکن کی حاصل ضرب کا دگنا۔

یعنی 2 × 3ا × دوسرا رکن = 12اب

پس دوسرا رکن = 12اب / (2 × 3ا) = 12اب / 6ا

= 2ب

لہٰذا نامعلوم رقم = (2ب)^2 = 4ب^2

مشق 5.5

(1) مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربع معلوم کریں۔

(i) 2ا + 3 (ii) 5 + 7ب (iii) 4ا + 3ب

(iv) ا + $\frac{1}{2}$ب (v) $\frac{5}{8}$ا + 8ب (vi) $\frac{2}{3}$ا + $\frac{5}{6}$ب

(2) مختصر کریں۔

(i) (2ا+3ب)^2 + (4ا+5ب)^2

(ii) (4ا + 2ب)^2 + (6ا+4ب)^2

(iii) (3ا+8ب)^2 + (2ج +5د)^2

(iv) (8ا + 6ب)^2 − (5ا+3ب)^2

(v) $(7\text{ا} + 2\text{ب})^2 - (9\text{ا} + 4\text{ب})^2$

(vi) $(3\text{ا} + 9\text{ب})^2 - (5\text{ج} + 7\text{د})^2$

(3) کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربع معلوم کریں۔

(i) 43 (ii) 109 (iii) 502 (iv) 1001 (v) 10006

(4) مندرجہ ذیل میں ہر ایک جملہ دو ارکان کے مجموعہ کا مربع ہے، نامعلوم رقم معلوم کریں۔

(i) $\text{ا}^2 + (\quad) + 4\text{ب}^2$

(ii) $9\text{ا}^2 + (\quad) + \text{ب}^2$

(iii) $\text{ا}^2 + (\quad) + 25$

(iv) $25\text{ا}^2 + (\quad) + 16\text{ب}^2$

(v) $\frac{1}{4}\text{ا}^2 + (\quad) + \text{ب}^2$

(vi) $\frac{4}{9}\text{ا}^2 + (\quad) + \frac{9}{16}\text{ب}^2$

(vii) $4\text{ا}^2 + 4\text{اب} + (\quad)$

(viii) $(\quad) + 40\text{اب} + 25\text{ب}^2$

(ix) $16\text{ا}^2 + 4\text{اب} + (\quad)$

(x) $(\quad) + \text{اب} + \text{ب}^2$

(xi) $\frac{1}{9}\text{ا}^2 + \frac{2}{3}\text{اب} + (\quad)$

(xii) $\frac{4}{25}\text{ا}^2 + \frac{2}{3}\text{اب} + (\quad)$

5.6 کلیہ II : $(\text{ا} - \text{ب})^2 = \text{ا}^2 - 2\text{اب} + \text{ب}^2$

ثبوت : $(\text{ا} - \text{ب})^2 = (\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})$

$= \text{ا}(\text{ا} - \text{ب}) - \text{ب}(\text{ا} - \text{ب})$

$= \text{ا}^2 - \text{اب} - \text{با} + \text{ب}^2$

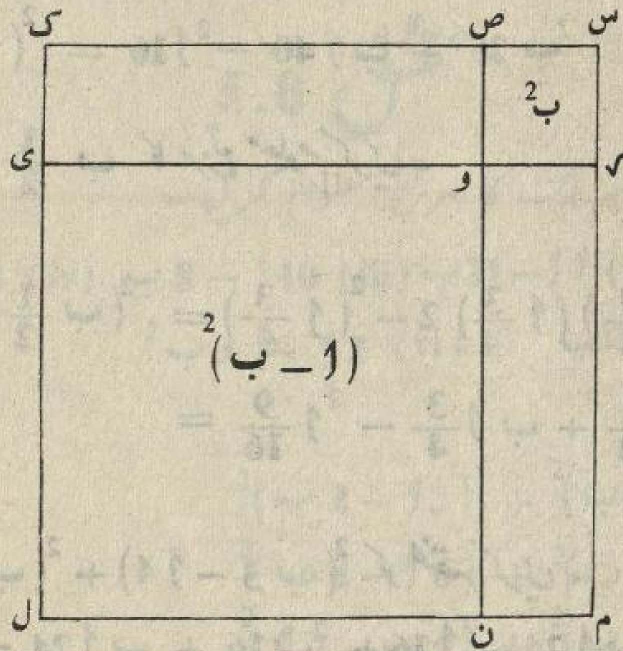
$= \text{ا}^2 - 2\text{اب} + \text{ب}^2$

الفاظ میں اس کلیہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں:

دو ارکان کے فرق کا مربّع =

پہلے رکن کا مربّع + دوسرے رکن کا مربّع — دونوں ارکان کے حاصل ضرب کا دُگنا۔

جیومیٹری کی مدد سے اس کلیہ کی یوں تشریح کی جا سکتی ہے۔



قطعہ خط ل م = ا اکائیاں لیں ۔ اس میں سے ن م = ب اکائیاں کاٹیں۔

اب ل ن = ا – ب اکائیاں

ل ن پر مربّع ل ن و ی بنائیں۔

ل م پر مربّع ل م س ک بنائیں۔

ن و ، س ک کو ص میں کاٹتا ہے۔

س ص پر مربّع س ص و ر بنائیں۔

شکل سے صاف ظاہر ہے کہ

علاقہ ل ن و ی کا رقبہ = علاقہ ل م س ک کا رقبہ — علاقہ ن م س ص کا رقبہ

— علاقہ ی ر س ک کا رقبہ + علاقہ س ص و ر کا رقبہ

یعنی (ا – ب)^2 = ا^2 – ا ب – ا ب + ب^2

= ا^2 – 2 ا ب + ب^2

مثال 1 : $3 - ا$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(3 - ا)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times ا + ا^2$

$= 9 - 6ا + ا^2$

مثال 2 : $4ا - 5ب$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(4ا - 5ب)^2 = 16ا^2 - 40اب + 25ب^2$

مثال 3 : $\frac{3}{4}ا - \frac{1}{2}ب$ کا مربع معلوم کریں۔

حل : $(\frac{3}{4}ا - \frac{1}{2}ب)^2 = (\frac{3}{4}ا)^2 - 2(\frac{3}{4}ا)(\frac{1}{2}ب) + (\frac{1}{2}ب)^2$

$= \frac{9}{16}ا^2 - \frac{3}{4}اب + \frac{1}{4}ب^2$

مثال 4 : $(3ا - 4ب)^2 + (4ا - 3ب)^2$ کو مختصر کریں۔

حل : جملہ $= 9ا^2 - 24اب + 16ب^2 + 16ا^2 - 24اب + 9ب^2$

$= 25ا^2 - 48اب + 25ب^2$

مثال 5 : $(7ا - 5ب)^2 - (5ا - 9ب)^2$ کو مختصر کریں۔

حل : جملہ $= (49ا^2 - 70اب + 25ب^2) - (25ا^2 - 90اب + 81ب^2)$

$= 49ا^2 - 70اب + 25ب^2 - 25ا^2 + 90اب - 81ب^2$

$= 24ا^2 + 20اب - 56ب^2$

مثال 6 : $(97)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کریں۔

حل : $(97)^2 = (100 - 3)^2$

$= (100)^2 - 2 \times 100 \times 3 + 3^2$

$= 10000 - 600 + 9$

$= 9409$

مثال 7 : اگر $4ا^2 + 12ا - (\quad)$ دو ارکان کے فرق کا مربع ہو تو نامعلوم رقم دریافت کریں۔

حل : نامعلوم رقم کسی رکن کا مربع ہے ۔ 2ا کا مربع 4ا^2 ہے ۔

12ا = 2ا × دوسرے رکن کا دُگنا

پس دوسرا رکن = $\frac{12ا}{4ا}$ = 3

نامعلوم رقم = 3^2 = 9

مشق 5.6

(1) مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربّع معلوم کریں ۔

(i) 5ا − 9 (ii) 7ا − 11ب (iii) 10ا − 8 ب (iv) 4ا − 12ب

(v) $\frac{7}{8}$ا − $\frac{8}{9}$ ب (vi) 2ا^2 − 3 ب^2

(2) مختصر کریں :

(i) (4ا − 3 ب)^2 + (3ا − 2 ب)^2

(ii) (5ا − 4 ب)^2 + (6ا − 8 ب)^2

(iii) (15ا − 10ب)^2 + (9 ب − 7 ا)^2

(iv) (7ا − 5 ب)^2 − (5ا − 8ب)^2

(v) (6ا − 3 ب)^2 − (5ب − 8ا)^2

(vi) (7ا − 13ب)^2 − (5ا − 9ب)^2

(vii) (ا + ب)^2 + (ا − ب)^2

(viii) (ا + ب)^2 − (ا − ب)^2

(3) کلیہ II کی مدد سے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربّع معلوم کریں ۔

(i) 58 (ii) 95 (iii) 498 (iv) 996 (v) 1997 (vi) 9997

(4) مندرجہ ذیل میں ہر جملہ دو ارکان کے فرق کا مربّع ہے ۔ نامعلوم رقم دریافت کریں ۔

(i) 9ا^2 − ( ) + 4 ب^2

(ii) $\frac{9}{16}$ا^2 − ( ) + 16ب^2

(iii) 4ا^2 − ( ) + 49ب^2

(iv) 25 − (   ) + $\frac{4}{25}$ ب^2

(v) 36 − 12ا + (   )

(vi) (   ) − ا ب + ب^2

(vii) (   ) − $\frac{1}{2}$ اب + $\frac{1}{4}$ ا^2

(viii) 121ا^2 − 176ا ب + (   )

5.7 کلیات I اور II کے نتائج صریح

نتیجہ صریح 1 : ا^2 + ب^2 = (ا + ب)^2 − 2ا ب

ثبوت : بائیں طرف = ا^2 + 2ا ب + ب^2 − 2ا ب

= ا^2 + ب^2

= دائیں طرف

نتیجہ صریح 2 : ا^2 + ب^2 = (ا − ب)^2 + 2ا ب

ثبوت : بائیں طرف = ا^2 − 2ا ب + ب^2 + 2ا ب

= ا^2 + ب^2

= دائیں طرف

نتیجہ صریح 3 : (ا + ب)^2 + (ا − ب)^2 = 2(ا^2 + ب^2)

ثبوت : دائیں طرف = ا^2 + 2ا ب + ب^2 + ا^2 − 2ا ب + ب^2

= 2(ا^2 + ب^2)

= بائیں طرف

نتیجہ صریح 4 : (ا + ب)^2 − (ا − ب)^2 = 4ا ب

ثبوت : دائیں طرف = ا^2 + 2ا ب + ب^2 − (ا^2 − 2ا ب + ب^2)

= ا^2 + 2ا ب + ب^2 − ا^2 + 2ا ب − ب^2

= 4ا ب

= بائیں طرف

نتیجہ صریح 5: $(\text{ا}+\text{ب})^2 = (\text{ا}-\text{ب})^2 + 4\text{اب}$

ثبوت: بائیں طرف $= \text{ا}^2 - 2\text{اب} + \text{ب}^2 + 4\text{اب}$

$= \text{ا}^2 + 2\text{اب} + \text{ب}^2$

$= (\text{ا}+\text{ب})^2$

= دائیں طرف

نتیجہ صریح 6: $(\text{ا}-\text{ب})^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 - 4\text{اب}$

ثبوت: بائیں طرف $= \text{ا}^2 + 2\text{اب} + \text{ب}^2 - 4\text{اب}$

$= \text{ا}^2 - 2\text{اب} + \text{ب}^2$

$= (\text{ا}-\text{ب})^2$

= دائیں طرف

مثال 1: اگر $\text{ا}+\text{ب} = 5$ اور $\text{اب} = 6$ تو $\text{ا}^2 + \text{ب}^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 - 2\text{اب}$ (نتیجہ صریح 1)

$= 5^2 - 2 \times 6$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$= 25 - 12 = 13$

مثال 2: اگر $\text{ا}-\text{ب} = 3$ اور $\text{اب} = 10$ تو $\text{ا}^2 + \text{ب}^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = (\text{ا}-\text{ب})^2 + 2\text{اب}$ (نتیجہ صریح 2)

$= 3^2 + 2 \times 10$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$= 9 + 20 = 29$

مثال 3: اگر $\text{ا}+\text{ب} = 10$ اور $\text{ا}-\text{ب} = 4$ تو $\text{ا}^2 + \text{ب}^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: $2(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) = (\text{ا}+\text{ب})^2 + (\text{ا}-\text{ب})^2$ (نتیجہ صریح 3)

$= 10^2 + 4^2$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$= 116$

پس $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = 58$

مثال 4: اگر $\text{ا}+\text{ب} = 8$ اور $\text{اب} = 15$ تو $(\text{ا}-\text{ب})^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: $(\text{ا}-\text{ب})^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 - 4\text{اب}$ (نتیجہ صریح 4)

$= 8^2 - 4 \times 15$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$= 4$

مثال 5 : اگر ا − ب = 1 اور ا ب = 20 تو (ا + ب)^2 کی قیمت معلوم کریں۔

حل : (ا + ب)^2 = (ا − ب)^2 + 4 ا ب (نتیجہ صریح 5)

= $1^2 + 4 \times 20$

= 81

مثال 6 : اگر لا + $\frac{1}{\text{لا}}$ = 3 تو لا^2 + $\frac{1}{\text{لا}^2}$ اور لا^4 + $\frac{1}{\text{لا}^4}$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل : لا + $\frac{1}{\text{لا}}$ = 3

یا (لا + $\frac{1}{\text{لا}}$)^2 = $(3)^2$ (طرفین کا مربع اٹھانے سے)

یا لا^2 + $\frac{1}{\text{لا}^2}$ + 2 = 9

پس لا^2 + $\frac{1}{\text{لا}^2}$ = 7

اب پھر دونوں طرف کا مربع لینے سے

(لا^2 + $\frac{1}{\text{لا}^2}$)^2 = 7^2

یا لا^4 + $\frac{1}{\text{لا}^4}$ + 2 = 49

پس لا^4 + $\frac{1}{\text{لا}^4}$ = 47

مشق 5.7

(1) ا^2 + ب^2 کی قیمت معلوم کریں جبکہ

(i) ا + ب = 3 ، ا ب = 2

(ii) ا + ب = 12 ، ا ب = 36

(iii) ا + ب = 2 ، ا ب = −3

(iv) ا − ب = 7 ، ا ب = 18

(v) ا − ب = 4 ، ا ب = 21

(vi) ا − ب = 5 ، ا ب = −6

(vii) ا + ب = 11 ، ا − ب = 5

(2) $(ا + ب)^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ :

(i) $ا - ب = 8$ ، $اب = 48$

(ii) $ا - ب = 17$ ، $اب = -30$

(iii) $ا - ب = -2$ ، $اب = 15$

(3) $(ا - ب)^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ :

(i) $ا + ب = 15$ ، $اب = 44$

(ii) $ا + ب = -1$ ، $اب = -30$

(iii) $ا + ب = 19$ ، $اب = -42$

(iv) $ا + ب = ل$ ، $اب = ن$

(4) $لا^2 + \frac{1}{لا^2}$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ :

(i) $لا + \frac{1}{لا} = 8$

(ii) $لا + \frac{1}{لا} = 12$

(iii) $لا + \frac{1}{لا} = 21$

(iv) $لا - \frac{1}{لا} = 5$

(v) $لا - \frac{1}{لا} = 3$

(vi) $لا - \frac{1}{لا} = -7$

(5) $لا^4 + \frac{1}{لا^4}$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ :

(i) $لا + \frac{1}{لا} = 6$

(ii) $لا - \frac{1}{لا} = -4$

(6) (i) اگر $لا^2 + \frac{1}{لا^2} = 51$ تو $لا - \frac{1}{لا}$ کی قیمت معلوم کریں۔

(ii) اگر $لا^2 + \frac{1}{لا^2} = 23$ تو $لا + \frac{1}{لا}$ کی قیمت معلوم کریں۔

5.8 کلیہ III: (ا + ب) (ا − ب) = ا^2 − ب^2

ثبوت: (ا + ب) (ا − ب) = ا (ا − ب) + ب (ا − ب)

= ا^2 − اب + با − ب^2

= ا^2 − ب^2

الفاظ میں اس کلیہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں:

دو ارکان کے مجموعہ اور فرق کا حاصل ضرب = پہلے رکن کا مربع − دوسرے رکن کا مربع

مثال 1: (ا + 3) (ا − 3) کو مختصر کریں۔

حل: (ا + 3) (ا − 3) = ا^2 − 3^2

= ا^2 − 9

مثال 2: 5ا − 7ب اور 5ا + 7ب کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: (5ا − 7ب) (5ا + 7ب)

= (5ا)^2 − (7ب)^2

= 25ا^2 − 49ب^2

مثال 3: (1 + لا) (1 − لا) (1 + لا^2) کو حل کریں۔

حل: جملہ = (1^2 − لا^2) (1 + لا^2)

= 1^2 − (لا^2)^2 =

1 − لا^4

مثال 4: اگر ا + ب = 15 اور ا^2 − ب^2 = 45 تو ا − ب کی قیمت معلوم کریں۔

حل: (ا + ب) (ا − ب) = ا^2 − ب^2

پس 15(ا − ب) = 45 (قیمتیں درج کرنے سے)

یا ا − ب = $\frac{45}{15}$ = 3

مثال 5: کلیہ کی مدد سے 102 × 98 کی قیمت معلوم کریں۔

حل: 102 × 98 = (100 + 2) (100 − 2)

= (100)^2 − 2^2

= 10000 − 4

= 9996

مشق 5.8

(1) کلیہ کی مدد سے حل کریں :

(i) (لا + 3ما) (لا − 3ما)

(ii) (5ا + ب) (5ا − ب)

(iii) (6ا + 8ب) (6ا − 8ب)

(iv) (ا^2 + ب^2) (ا^2 − ب^2)

(v) ($\sqrt{2}$ + $\sqrt{3}$) ($\sqrt{2}$ − $\sqrt{3}$)

(vi) (2$\sqrt{\text{ا}}$ + 5$\sqrt{\text{ب}}$) (2$\sqrt{\text{ا}}$ − 5$\sqrt{\text{ب}}$)

(2) مسلسل حاصل ضرب معلوم کریں :

(i) (لا + 2ما) (لا − 2ما) (لا^2 + 4ما^2)

(ii) (5ا + 7ب) (5ا − 7ب) (25ا^2 + 49ب^2)

(iii) ($\sqrt{\text{ا}}$ + $\sqrt{\text{ب}}$) ($\sqrt{\text{ا}}$ − $\sqrt{\text{ب}}$) (ا + ب) (ا^2 + ب^2)

(iv) (4ا − 3ب) (16ا^2 + 9ب^2) (4ا + 3ب)

(v) ($\sqrt{\text{ا}^3}$ + $\sqrt{\text{ب}^3}$) ($\sqrt{\text{ا}^3}$ − $\sqrt{\text{ب}^3}$) (ا^3 + ب^3)

(3) قیمت معلوم کریں :

(i) ا − ب کی جبکہ ا + ب = 10 ، ا^2 − ب^2 = 40

(ii) ا + ب کی جبکہ ا − ب = 5 ، ا^2 − ب^2 = 65

(iii) ا^2 + ب^2 کی جبکہ ا + ب = 12 ، ا^2 − ب^2 = 24

(iv) اب کی جبکہ ا + ب = 8 ، ا^2 − ب^2 = 16

(v) اب کی جبکہ ا − ب = 1 ، ا^2 − ب^2 = 31

(4) کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں :

(i) 54×46 (ii) 97×103

(iii) 109×91 (iv) 1010×990

(v) 0.98×1.02

5.9 کلیہ ۱۷ : (لا + ا)(لا + ب) = لا^2 + لا(ا + ب) + اب

ثبوت : (لا + ا)(لا + ب) = لا(لا + ب) + ا(لا + ب)

= لا^2 + لاب + الا + اب

= لا^2 + لاب + لاا + اب

= لا^2 + لا(ب + ا) + اب

= لا^2 + لا(ا + ب) + اب

لا + ا اور لا + ب کے حاصل ضرب میں تین رقمیں ہیں۔ پہلی رقم لا^2 ہے۔ دوسری رقم لا(ا + ب) یا (ا + ب) لا ہے۔ جس کا سر ا اور ب کا مجموعہ ہے تیسری رقم ا اور ب کا حاصل ضرب ہے۔

مثال 1: (لا + 2)(لا + 5) کو حل کریں۔

حل : (لا + 2)(لا + 5) = لا^2 + (2 + 5) لا + 2 × 5

= لا^2 + 7لا + 10

مثال 2 : (لا + 8)(لا − 3) کو حل کریں۔

حل : جملہ = لا^2 + لا{8 + (−3)} + 8 × (−3)

= لا^2 + 5لا − 24

مثال 3 : (3لا + 2)(3لا + 7) کو حل کریں۔

حل : جملہ = (3لا)^2 + 3لا(2 + 7) + 2 × 7

= 9لا^2 + 27لا + 14

مثال 4 : (5لا + 7)(11لا − 13) کو مختصر کریں۔

حل : جملہ = 55لا^2 − 65لا + 77لا − 91

= 55لا^2 + 12لا − 91

مثال 5 : (لا + 4)(لا + 6) − (لا − 3)(لا + 13) کو مختصر کریں۔

حل : جملہ = لا^2 + لا(4 + 6) + 24 − {لا^2 + لا(−3 + 13) + (−3) × 13}

= لا^2 + 10لا + 24 − (لا^2 + 10لا − 39)

= لا^2 + 10لا + 24 − لا^2 − 10لا + 39

= 63

مشق 5.9

(1) کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

(i) (لا + 5) (لا + 8)

(ii) (لا + 13) (لا − 4)

(iii) (لا + 2) (لا − 12)

(iv) (لا − 10) (لا − 15)

(v) (4لا + 5) (4لا + 6)

(vi) (7لا − 2) (7لا + 8)

(vii) (3لا + 8) (3لا + 11)

(viii) (الا − ب) (ج لا − د)

(ix) (د لا + س) (م لا + ص)

(x) (اب لا + ک) (ج د لا + گ)

(xi) (لا² + ا²) (لا² + ب²)

(2) مختصر کریں:

(i) (لا + 7) (لا + 3) − (لا + 1) (لا + 4)

(ii) (لا + 9) (لا + 11) − (لا + 15) (لا − 5)

(iii) (لا + 3) (لا + 12) − (لا − 3) (لا − 12)

(iv) (لا − 13) (لا − 3) − (لا − 4) (لا − 11)

(v) (5لا + 1) (5لا + 2) − (3لا + 7) (3لا + 11)

اجزائے ضربی

آپ پڑھ چکے ہیں کہ اگر کوئی عدد کسی دیے ہوئے عدد کو پورا پورا تقسیم کرے تو وہ عدد دیے ہوئے عدد کا عاد یا جزوِ ضربی کہلاتا ہے۔ مثلاً 3 جزو ضربی ہے 12 کا۔ کیونکہ 12 عدد 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ اسی طرح اگر کوئی دیا ہوا جبری جملہ دو یا دو سے زیادہ جبری جملوں کا حاصل ضرب ہو تو وہ جبری جملے، دیے ہوئے جبری جملے کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔ مثلاً جملہ 5 ا ب میں 5، ا اور ب اس کے اجزائے ضربی ہیں۔

جبری جملوں کی تجزی ایک نہایت مفید آلہ کار ہے جو جبری کسور کے اختصار، جبری جملوں کے عادِ اعظم و ذو اضعاف اقل معلوم کرنے اور الجبرا کے بہت سے دیگر موضوعات میں کثرت سے استعمال ہوتا ہے۔ مرکب جبری جملوں کی تجزی کرنے کے لیے ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع اور کلیات اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

5.10 جملے کی رقوم میں مشترک جزو معلوم کر کے تجزی کرنا:

مثال 1: 2 لا + 4 کی تجزی کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ اس جملہ میں دو رقوم ہیں اور 2 ہر رقم کا جزوِ ضربی ہے۔

پس 2 لا + 4 = 2 (لا + 2) (ضرب کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ جمع سے)

2 اور لا + 2 دیے ہوئے جملہ کے اجزائے ضربی ہیں۔

مثال 2: 5 لا ا + 7 لا ب کی تجزی کریں۔

حل: یہاں لا دونوں رقموں کا جزو ضربی ہے۔

پس 5 لا ا + 7 لا ب = لا (5 ا + 7 ب)

لا اور 5 ا + 7 ب دیے ہوئے جملہ کے اجزائے ضربی ہیں۔

مثال 3: 3 ا $لا^2$ + 3 ا لا + 3 ا کی تجزی کریں۔

حل: اس جملہ میں 3 ا ہر رقم کا جزو ضربی ہے۔

اس لیے 3ا لا^{2} + 3ا لا + 3ا = 3ا (لا^{2} + لا + 1)

مطلوبہ تجزی = 3ا (لا^{2} + لا + 1)

مثال 4 : ا^{2} ب ج + ا ب^{2} ج + ا ب ج^{2} کی تجزی کریں ۔

حل : یہاں ا ب ج مشترک جزو ضربی ہے ۔

پس ا^{2} ب ج + ا ب^{2} ج + ا ب ج^{2} = ا ب ج (ا + ب + ج)

مشق 5.10

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی تجزی کریں :

(1) 49 لا + 7   (2) 35 لا^{2} − 5

(3) لا^{4} + لا^{2} (4) 4 ا^{2} ب − 8 ا ب^{2}

(5) 5 لا^{3} ما^{2} ی − 15 لا^{4} ما ی^{2} (6) − 8 − 32 لا^{3}

(7) ا^{2} ب − ج ا^{2} − ا^{3}

(8) 4 لا^{4} − 6 لا^{3} ما + 4 لا^{2} ما^{2}

(9) − ا^{3} ب^{2} ج − ا ب^{3} ج^{2} − ا^{2} ب ج^{3}

(10) 3 ا^{3} ب^{3} ج^{2} + 6 ا^{2} ب^{2} ج^{3} − 9 ا^{2} ب^{3} ج^{3}

5.11 جملہ میں رقوم کی گروہ بندی یا ازسرِ نو ترتیب دے کر تجزی کرنا :

بعض اوقات پورے جملے میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہوتا ۔ البتہ جملہ میں مختلف رقوم کی گروہ بندی یا دوبارہ ترتیب دینے سے مشترک جزو معلوم کیا جا سکتا ہے ۔

مثال 1: ا ب + ب ج + ا د + ج د کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ کی سب رقوم میں کوئی جزو مشترک نہیں ۔ رقوم کی ترتیب بدلنے کی ضرورت نہیں ۔ گروہ بندی اس طرح کریں ۔

جملہ = اب + ب ج + اد + ج د

= (اب + ب ج) + (اد + ج د) گروہ بندی کرنے سے

= ب (ا + ج) + د (ا + ج) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

= (ا + ج) (ب + د) (ایضاً)

= (ب + د) (ا + ج) ضرب کی خاصیت مبادلہ سے

مطلوبہ تجزی = (ب + د) (ا + ج)

مثال 2 لا^2 + 4لا − 3(لا + 4) کی تجزی کریں۔

حل: جملہ = لا^2 + 4لا − 3لا − 12

= (لا^2 + 4لا) − (3لا + 12)

= لا (لا + 4) − 3 (لا + 4)

= (لا − 3) (لا + 4) مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال 3: 2لا^3 − 6لا^2 + 8لا − 24 کی تجزی کریں۔

حل: یہاں 2 سب رقوم کا جزو ضربی ہے۔

پس جملہ = 2 (لا^3 − 3لا^2 + 4لا − 12)

= 2 {(لا^3 − 3لا^2) + (4لا − 12)}

= 2 {لا^2 (لا − 3) + 4 (لا − 3)}

= 2 {(لا − 3) (لا^2 + 4)}

= 2 (لا − 3) (لا^2 + 4) مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال 4: 10ا^{2}لا^2 − 30ب^{2}ما^2 − 15ب^{2}لا^2 + 20ا^{2}ما^2 کی تجزی کریں۔

حل: جملہ = 5 {2ا^{2}لا^2 + 4ا^{2}ما^2 − (3ب^{2}لا^2 + 6ب^{2}ما^2)}

= 5 {2ا^2 (لا^2 + 2ما^2) − 3ب^2 (لا^2 + 2ما^2)}

= 5 {(لا^2 + 2ما^2) (2ا^2 − 3ب^2)}

= 5 (لا^2 + 2ما^2) (2ا^2 − 3ب^2) مطلوبہ تجزی ہے۔

مشق 5.11

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی تجزی کریں ۔

(1) ب لا + ج لا + ب ما + ج ما
(2) ط لا − ع لا + ط ما − ع ما
(3) ا لا − ب ما + ب لا − ا ما
(4) ا لا^2 + ب ما^2 + ا ما^2 + ب لا^2
(5) 2 اب − 6 ب ج − ا + 3 ج
(6) لا^3 − لا^2 + لا − 1
(7) ا^2 لا ما + ب^2 لا ما − ا ب لا^2 − ا ب ما^2
(8) 6 − 10 لا + 9 لا^2 − 15 لا^3
(9) ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 + ا^2 ما^2 + ب^2 لا^2
(10) 3 ا لا^2 ب + 2 لا − 6 ا لا ب^2 − 4 ب
(11) ا لا + ا ما + ا ی − ب لا − ب ما − ب ی
(12) 2 ا + 2 لا − ا لا + 2 ب لا^2 − لا^2 − ب لا^3

5.12 ا^2 + 2 اب + ب^2 اور ا^2 − 2 اب + ب^2 کی شکل کے جملوں کی تجزی :

ہمیں معلوم ہے کہ :

ا^2 + 2 اب + ب^2 = (ا + ب)^2

ا^2 − 2 اب + ب^2 = (ا − ب)^2

دیے ہوئے جملوں کی تجزی ان کلیات کی مدد سے کی جائے گی ۔

مثال 1 : 9 ا^2 + 30 اب + 25 ب^2 کی تجزی کریں ۔

حل : 9 ا^2 + 30 اب + 25 ب^2 = (3 ا)^2 + 2 (3 ا) (5 ب) + (5 ب)^2

= (3 ا + 5 ب)^2

پس مطلوبہ تجزی = (3 ا + 5 ب)^2

مثال 2 : 16 ا^2 − 64 ا + 64 کی تجزی کریں ۔

حل : 16 ا^2 − 64 ا + 64 = 16 (ا^2 − 4 ا + 4)

= 16 (ا − 2)^2

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے ۔

مثال 3: ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} + 2اب + 2 ب ج + 2 ج ا کی تجزی کریں۔

حل: جملہ = (ا^{2} + ب^{2} + 2اب) + (2ب ج + 2 ج ا) + ج^{2}

= (ا + ب)^{2} + 2ج (ا + ب) + ج^{2}

= (ا + ب + ج)^{2} مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال 4: لا^{4} + 4لا^{2}ما^{2} + 4ما^{4} کی تجزی کریں۔

حل: جملہ = لا^{4} + 4 لا^{2}ما^{2} + 4ما^{4}

= (لا^{2} + 2ما^{2})^{2}

= (لا^{2} + 2ما^{2}) (لا^{2} + 2 ما^{2}) مطلوبہ تجزی ہے۔

مشق 5.12

تجزی کریں:

(1) لا^{2} + 10 لا + 25

(2) 4ا^{2} + 4اب + ب^{2}

(3) 9ا^{2} + 12اب + 4ب^{2}

(4) 81ا^{2} + 108اب + 36ب^{2}

(5) 1 + 8ا ب ج + 16ا^{2}ب^{2}ج^{2}

(6) 49ا^{2} + 28اب + 4ب^{2}

(7) 64 + 25ا^{2} − 80ا

(8) $\frac{4}{9}$ا^{2} − اب + $\frac{9}{16}$ب^{2}

(9) 16ا^{2}ب^{2} − 24ا ب ج + 9 ج^{2}

(10) 36ا^{2} − 60اب + 25ب^{2}

(11) 1 − 6ا^{2}ب^{2}ج + 9ا^{4}ب^{4}ج^{2}

(12) 4 لا^{6} − 20 لا^{4}مای + 25لا^{2}ما^{2}ی^{2}

(13) ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} − 2اب + 2اج − 2ب ج

(14) ا^{4} + ب^{4} + ج^{4} + 2ا^{2}ب^{2} + 2ب^{2}ج^{2} + 2ج^{2}ا^{2}

(15) $4\text{ا}^2 + 9\text{ب}^2 + 25\text{ج}^2 + 12\text{اب} - 20\text{اج} - 30\text{بج}$

(16) $\text{ا}^2 + 4\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 4\text{اب} - 2\text{اج} + 4\text{بج}$

5.13 $\text{ا}^2 - \text{ب}^2$ کی شکل کے جملوں کی تجزی :

ہم جانتے ہیں کہ $\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = (\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})$

پس $(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})$ دیے ہوئے جملہ کی تجزی ہے ۔ دو مربعوں کے فرق کی تجزی اس کلیہ کی مدد سے کی جائے گی ۔

مثال 1 : $\text{ا}^2 - 9$ کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ $= \text{ا}^2 - 9$

$= \text{ا}^2 - (3)^2$

$= (\text{ا}+3)(\text{ا}-3)$

پس مطلوبہ تجزی $= (\text{ا}+3)(\text{ا}-3)$

مثال 2 : $16\text{ا}^2 - \text{ب}^2$ کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ $= (4\text{ا})^2 - \text{ب}^2$

$= (4\text{ا}+\text{ب})(4\text{ا}-\text{ب})$ جو کہ مطلوبہ تجزی ہے ۔

مثال 3 : $\text{ا}^2 - 81\text{ب}^2$ کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ $= \text{ا}^2 - (9\text{ب})^2$

$= (\text{ا}+9\text{ب})(\text{ا}-9\text{ب})$

مثال 4 : $20\text{ا}^2 - 45\text{ب}^2$ کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ $= 5(4\text{ا}^2 - 9\text{ب}^2)$

$= 5\{(2\text{ا})^2 - (3\text{ب})^2\}$

$= 5(2\text{ا}+3\text{ب})(2\text{ا}-3\text{ب})$

مثال 5 : $(\text{ا}+\text{ب})^2 - \text{ج}^2$ کی تجزی کریں ۔

حل : جملہ میں $\text{ا} + \text{ب} = \text{د}$ رکھیں تو

جملہ $= \text{د}^2 - \text{ج}^2 = (\text{د}+\text{ج})(\text{د}-\text{ج})$

$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})$ (د کی قیمت رکھنے سے)

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے ۔

مثال 6 : $4ا^2 - (ب + 3ج)^2$ کی تجزی کریں۔

حل : اگر ب + 3ج = د رکھیں تو

$4ا^2 - (ب + 3ج)^2 = 4ا^2 - د^2$

$= (2ا)^2 - (د)^2$

$= (2ا + د)\ (2ا - د)$

$= (2ا + ب + 3ج)\ (2ا - \overline{ب + 3ج})$ (د کی قیمت درج کرنے سے)

$= (2ا + ب +\ \ ج)\ (2ا - ب - 3ج)$

مثال 7 : $(2ا - ب - ج)^2 - (لا + ما)$ کی تجزی کریں۔

حل : جملہ میں 2ا − ب − ج = ر اور لا + ما = س رکھیں تو

$(2ا - ب - ج)^2 - (لا + ما)^2 = ر^2 - س^2$

$= (ر + س)\ (ر - س)$

$= (2ا - ب - ج + لا + ما)\ (2ا - ب - ج - \overline{لا + ما})$

(ر اور س کی قیمتیں رکھنے سے)

$= (2ا - ب - ج + لا + ما)\ (2ا - ب - ج - لا - ما)$

مثال 8 : $لا^4 + 64$ کی تجزی کریں۔

حل : جملہ $لا^2$ اور 8 کے مربعوں کا مجموعہ ہے۔ اسے مکمل مربع بنانے کے لیے اس میں $2 \times 8\ لا^2$ جمع کریں اور یہی رقم اس میں سے تفریق کریں تاکہ جملہ کی قیمت تبدیل نہ ہو۔

$لا^4 + 64 = لا^4 + 64 + 16لا^2 - 16لا^2$

$= (لا^2 + 8)^2 - (4لا)^2$

(اب یہ دو مربعوں کا فرق ہے)

$= (لا^2 + 8 + 4لا)\ (لا^2 + 8 - 4لا)$

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال 9 : $ا^4 + ا^2ب^2 + ب^4$

حل : جملہ کو دو ارکان کا مکمل مربّع بنانے کے لیے اس میں $ا^2ب^2$ جمع اور تفریق کریں ۔ پس

$$ا^4+ا^2ب^2+ب^4=ا^4+ا^2ب^2+ب^4+ا^2ب^2-ا^2ب^2$$
$$=ا^4+2ا^2ب^2+ب^4-ا^2ب^2$$
$$=(ا^2)^2+2ا^2ب^2+(ب^2)^2-ا^2ب^2$$
$$=(ا^2+ب^2)^2-(اب)^2$$
$$=(ا^2+ب^2+اب)(ا^2+ب^2-اب)$$
$$=(ا^2+اب+ب^2)(ا^2-اب+ب^2)$$

مثال 10: $لا^4+لا^2+1$ کی تجزّی کریں ۔

حل : جملہ میں $لا^2$ جمع اور تفریق کریں تو

$$لا^4+لا^2+1=لا^4+لا^2+1+لا^2-لا^2$$
$$=(لا^2)^2+2لا^2+1-لا^2$$
$$=(لا^2+1)^2-(لا)^2$$
$$=(لا^2+1+لا)(لا^2+1-لا)$$
$$=(لا^2+لا+1)(لا^2-لا+1)$$

مثال 11: $\frac{(68.6)^2-(39.6)^2}{108.2}$ کو مختصر کریں ۔

حل : دی ہوئی رقم کا شمار کنندہ دو مربّعوں کا فرق ہے لہٰذا کلیہ کی مدد سے

$$\frac{(68.6)^2-(39.6)^2}{108.2}$$
$$=\frac{(68.6-39.6)(68.6+39.6)}{108.2}$$
$$=\frac{29.0\times108.2}{108.2}=29$$

مشق 5.13

تجزی کریں ۔

(1) $ا^2-25$ (2) $49ا^2-81$

(3) $64-ب^2$ (4) $36ا^2-9ب^2$

(5) ا^{2}ب^{2} − ج^{2}ا^{2}
(6) ا^{4} − ب^{4}
(7) 16ا^{4} − ب^{4}
(8) ا^{3} − اب^{2}
(9) 4ا^{3}ب − اب^{3}
(10) ا^{2}ب^{4} − 16ج^{2}د^{4}
(11) (2ا + ب)^{2} − 4ج^{2}
(12) (3لا + 7ما)^{2} − 9ی^{2}
(13) 16 − (4ا + 5ب)^{2}
(14) 49لا^{2} − (7لا + 3ی)^{2}
(15) (3ا − 5ب)^{2} − (2ا − 3ب)^{2}
(16) 4(ا + ب)^{2} − 9(ا − ب)^{2}
(17) لا^{4} + 4
(18) 4لا^{4} + 81
(19) 81ا^{4} + 64ب^{4}
(20) 16ا^{4} + 36ا^{2}ب^{2} + 81ب^{4}
(21) لا^{8} + لا^{4} + 1
(22) $(99)^2 - (98)^2$ کی قیمت کلیہ کی مدد سے معلوم کریں۔
(23) $\frac{(161)^2 - (136)^2}{25}$ کو مختصر کریں۔
(24) $\frac{(305.5)^2 - (189.5)^2}{116}$ کو مختصر کریں۔
(25) $\frac{0.643 \times 0.643 - 0.987 \times 0.987}{0.643 + 0.987}$ کو مختصر کریں۔

5.14 دو درجی جملوں کی تجزی

اگر ا، ب، ج اعداد ہوں اور ا $\neq 0$ تو کثیر رقمی ا لا^{2} + ب لا + ج دو درجی جملہ کہلاتا ہے۔ جب اس جملہ میں ا = 1 ہو تو یہ لا^{2} + ب لا + ج کی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ پہلے ہم لا^{2} + ب لا + ج کی شکل کے جملوں کے اجزائے ضربی بنائیں گے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اگر (لا + د) (لا + س) کو حل کریں تو ہمیں جملہ لا^{2} + (د + س) لا + د س حاصل ہوتا ہے۔ جملہ لا^{2} + ب لا + ج بھی لا + د اور لا + س کی حاصل ضرب کی شکل کا ہے۔ پس ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ لا^{2} + ب لا + ج کے اجزائے ضربی دو یک درجی جملوں پر مشتمل ہوں گے۔ دیے ہوئے جملہ میں ج کے ایسے دو اجزائے ضربی ل ، ن معلوم کریں جن کا مجموعہ ب کے برابر ہو۔ یعنی ب = ل + ن ۔ اب ب لا = (ل + ن) لا لکھیں اور رقوم کی گروہ بندی کر کے اجزائے ضربی

بنائیں۔ تفصیلی عمل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1 : $\text{لا}^2 + 5\text{لا} + 6$ کی تجزّی کریں۔

حل : 6 کے عادوں کا سیٹ $= \{1، 2، 3، 6\}$

اس سیٹ کے ارکان 2 اور 3 ایسے ہیں جن کا مجموعہ 5 اور حاصل ضرب 6 کے برابر ہے۔

پس $\text{لا}^2 + 5\text{لا} + 6 = \text{لا}^2 + (2 + 3)\,\text{لا} + 6$

$= (\text{لا}^2 + 2\text{لا}) + (3\text{لا} + 6)$ (گروہ بندی کرنے سے)

$= \text{لا}\,(\text{لا} + 2) + 3\,(\text{لا} + 2)$

$= (\text{لا} + 2)\,(\text{لا} + 3)$

جو کہ مطلوبہ تجزّی ہے۔

مثال 2 : $\text{لا}^2 - \text{لا} - 12$ کے اجزائے ضربی بنائیں۔

حل : 12 کے عادوں کا سیٹ $= \{1، 2، 3، 4، 6، 12\}$

چونکہ مطلق رقم -12 ہے اس لیے ایسے دو اجزا جن کا حاصل ضرب -12 ہو مختلف علامتوں کے ہوں گے اور ان اجزا کا مجموعہ -1 ہونا چاہیے۔ اس لیے مطلوبہ اجزا 4، 3 ہیں جن میں 4 کی علامت '—' اور 3 کی علامت '+' ہوگی۔

$\text{لا}^2 - \text{لا} - 12 = \text{لا}^2 + (-4 + 3)\,\text{لا} - 12$

$= (\text{لا}^2 - 4\text{لا}) + (3\text{لا} - 12)$

$= \text{لا}\,(\text{لا} - 4) + 3\,(\text{لا} - 4)$

$= (\text{لا} - 4)\,(\text{لا} + 3)$

مثال 3 : $\text{لا}^2 - 11\text{لا} + 30$ کی تجزّی کریں۔

حل : 30 کے عادوں کا سیٹ $= \{1، 2، 3، 5، 6، 10، 15، 30\}$

5 اور 6 مطلوبہ اجزا ہیں۔ چونکہ لا کا عددی سر -11 ہے اور 30 کی علامت '+' ہے اس لیے 5 اور 6 دونوں کی علامتیں '—' ہوں گی۔

جملہ $\text{لا}^2 - 11\text{لا} + 30$

$= \text{لا}^2 + (-5 - 6)\,\text{لا} + 30$

$= لا^2 - 5لا - 6لا + 30$

$= (لا^2 - 5لا) + (-6لا + 30)$

$= لا(لا - 5) - 6(لا - 5)$

$= (لا - 5)(لا - 6)$

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے۔

اوپر کی مثالوں میں دو درجی جملوں میں $لا^2$ کا عددی سر '1' ہے۔ اگر $لا^2$ کا عددی سر "1" کے علاوہ کوئی دوسرا عدد ہو تو $ا لا^2 + ب لا + ج$ کی شکل کے جملوں کی تجزی مندرجہ بالا طریقہ سے نہیں ہو سکتی۔ ایسے جملوں کی تجزّی کرنے کے لیے $لا^2$ کے عددی سر "ا" اور مطلق رقم ج کے حاصل ضرب اج کے دو ایسے اجزائے ضربی معلوم کیے جاتے ہیں جن کا مجموعہ لا کے عددی سر "ب" کے برابر ہو۔ رقم ب لا کو (5.14) میں دیے ہوئے طریقہ کی طرح دو حصّوں میں تقسیم کر کے مناسب گروہ بندی کر کے تجزّی کی جاتی ہے۔ یہ طریقہ مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 4 : $2لا^2 + 3لا + 1$ کی تجزّی کریں۔

حل : $لا^2$ کے عددی سر 2 اور مطلق رقم 1 کا حاصل ضرب 2 ہے۔

1 اور 2 عدد 2 کے ایسے اجزائے ضربی ہیں جن کا مجموعہ لا کے عددی سر 3 کے برابر ہے۔

پس جملہ $= 2لا^2 + (2 + 1)لا + 1$

$= 2لا^2 + 2لا + لا + 1$

$= (2لا^2 + 2لا) + (لا + 1)$

$= 2لا(لا + 1) + 1(لا + 1)$

$= (لا + 1)(2لا + 1)$

جو کہ مطلوبہ تجزّی ہے۔

مثال 5 : $3لا^2 + 2لا - 1$ کی تجزّی کریں۔

حل : یہاں $لا^2$ کے عددی سر 3 اور مطلق رقم -1 کا حاصل ضرب -3 ہے۔

-3 کے ایسے دو اجزا جن کا مجموعہ 2 ہو 3 اور -1 ہیں۔

پس $3لا^2+2لا-1 = 3لا^2+3لا-لا-1$

$= (3لا^2+3لا)+(-لا-1)$

$= 3لا(لا+1)-1(لا+1)$

$= (لا+1)(3لا-1)$

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال 6 : $2لا^2+11لا+14$ کی تجزی کریں۔

حل : $2 \times 14 = 28$ کے ایسے دو اجزائے ضربی جن کا مجموعہ 11 ہو، 4 اور 7 ہیں۔

پس $2لا^2+11لا+14 = 2لا^2+4لا+7لا+14$

$= (2لا^2+4لا)+(7لا+14)$

$= 2لا(لا+2)+7(لا+2)$

$= (لا+2)(2لا+7)$

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے۔

مثال : $7لا^2-25لا-12$ کی تجزی کریں۔

حل : $7 \times -12 = -84$ کے ایسے دو اجزائے ضربی جن کا مجموعہ -25 ہو، -28 اور 3 ہیں۔

$7لا^2-25لا-12 = 7لا^2+3لا-28لا-12$

$= 7لا^2-28لا+(3لا-12)$

$= 7لا(لا-4)+3(لا-4)$

$= (لا-4)(7لا+3)$

جو کہ مطلوبہ تجزی ہے۔

مشق 5.14

تجزی کریں :

(1) $لا^2+7لا+12$ (2) $لا^2+11لا+24$

(3) $لا^2+16لا+28$ (4) $لا^2+38لا+105$

(5) 20 + ي9 — ²ي

(6) 54 + ي15 — ²ي

(7) 35 + ي12 — ²ي

(8) 150 + ي35 — ²ي

(9) 6 — ي + ²ي

(10) 96 — ي4 + ²ي

(11) 78 — ي7 + ²ي

(12) 138 — ي17 — ²ي

(13) 15 — ي2 — ²ي

(14) 42 — ي — ²ي

(15) 66 — ي5 — ²ي

(16) 190 — ي9 — ²ي

(17) 2 + ي7 + ²ي6

(18) 12 + ي13 + ²ي3

(19) 2 + ي11 + ²ي5

(20) 3 + ي16 + ²ي13

(21) 2 — ي5 + ²ي12

(22) 4 — ي12 + ²ي7

(23) 13 — ي9 + ²ي4

(24) 17 — ي15 + ²ي2

(25) 21 — ي5 — ²ي6

(26) 11 — ي20 — ²ي4

(27) 6 — ي19 — ²ي11

(28) 5 — ي8 — ²ي13

(29) 5 — ²ي7 + ⁴ي6

(30) 2 — ²ي7 + ⁴ي49

باب 6

دو متغیرّات میں یک درجی مساواتوں کا نظام

ساتویں جماعت میں آپ ایک متغیرّ میں یک درجی مساواتوں کا حل سیٹ دریافت کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اب آپ دو متغیرّات میں یک درجی مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کرنا سیکھیں گے۔ اس سے پہلے کہ ہم دو متغیرّات میں یک درجی مساواتوں پر غور کریں، اعادہ کے طور پر مساواتوں سے متعلق چند تصوّرات اور اصول درج کیے جاتے ہیں۔

ایسی مساوات جس میں متغیرّ کی ایک رقم کا درجہ ایک اور باقی رقموں کا درجہ ایک یا ایک سے کم ہو، ایک متغیرّ میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔ ایک متغیرّ میں یک درجی مساوات کا حل سیٹ ایک رکن پر مشتمل ہوتا ہے۔

یاد رہے کہ متغیرّ کی وہ قیمتیں جو کسی دی ہوئی شرطِ مساوات کو پورا کریں، مساوات کا حل کہلاتی ہے۔ اور اس طرح کی تمام قیمتوں کا سیٹ مساوات کا حل سیٹ کہلاتا ہے۔

6.1 مترادف مساواتیں

اگر کسی مساوات پر مندرجہ ذیل عوامل کیے جائیں تو اُس سے ایک مترادف مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مترادف مساواتوں کے لیے علامت $\Longleftrightarrow$ استعمال ہوتی ہے۔ اگر کسی مساوات کی طرفین میں ایک ہی عدد جمع یا تفریق کیا جائے تو حاصل شدہ مساوات دی ہوئی مساوات کے مترادف ہوتی ہیں۔

مثلاً $\text{لا} + 3 = 5 \Longleftrightarrow \text{لا} + 3 + 2 = 5 + 2$

اور $\text{لا} + 3 = 5 \Longleftrightarrow \text{لا} + 3 + (-3) = 5 + (-3)$

اگر کسی مساوات کے دونوں طرف ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب دی جائے یا تقسیم کیا جائے تو حاصل شدہ مساوات دی ہوئی مساوات کے مترادف ہوتی ہے۔

مثلاً $\text{لا} = 6 \Longleftrightarrow 2\,\text{لا} = 2 \times 6$

اور $3\,\text{لا} = 15 \Longleftrightarrow \frac{3\,\text{لا}}{3} = \frac{15}{3}$

کسی مساوات کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے ہم اُسے آسان تر مترادف مساواتوں میں اس طرح تبدیل کرتے جاتے ہیں کہ آخرکار متغیّر کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

مثال : $3\text{لا} - 5 = 10$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل : $3\text{لا} - 5 = 10$

$$\Leftrightarrow 3\text{لا} - 5 + 5 = 10 + 5$$

$$\Leftrightarrow 3\text{لا} = 15$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\text{لا}}{3} = \frac{15}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{لا} = 5$$

پس مطلوبہ حل سیٹ $= \{5\}$

مشق 6.1

کون سے جوڑے مترادف مساواتوں کے ہیں؟

(1) $\text{لا} - 2 = 8$ اور $\text{لا} + 2 = 12$

(2) $10\text{لا} = 16$ اور $6\text{لا} = 16 - 4\text{لا}$

(3) $2\text{ما} + 3 = 21$ اور $2\text{ما} + 13 = 21$

(4) $3\text{ما} = 14$ اور $\frac{3}{2}\text{ما} = 7$

(5) $\text{لا} - 7 = 5$ اور $7 - \text{لا} = 5$

(6) $2\text{لا} + 3 = 1$ اور $\text{لا} + 3 = \frac{1}{2}$

(7) $\frac{\text{لا}}{5} = \frac{1}{2}$ اور $\text{لا} = \frac{5}{2}$

ذیل میں دی گئی ہر مساوات کو آسان تر مترادف مساوات میں تبدیل کر کے اس کا حل سیٹ دریافت کیجیے۔

(8) $\text{لا} - 7 = 3$

(9) $\frac{\text{لا}}{4} = 5$

(10) $\text{ما} + 3 = 11$

(11) $9\text{ما} = 15$

(12) 2لا + 3 = 13

(13) 3/5 لا − 4 = 0

(14) 5لا + 8 = 2لا + 5

(15) 2(6لا − 1) = 7

(16) (2 − 3لا) / 4 = (1 − 2لا) / 3

(17) (لا − 1) / (لا + 7) = 3 / 5

6.2 دو متغیّرات میں یک درجی مساواتوں کا نظام

ایسی مساوات جس میں دو متغیّرات ہوں اور جس کی رقموں کا درجہ ایک یا ایک سے کم ہو، دو متغیّرات میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

2لا + ما = 3 اور 4لا − 5ما = 0 دو متغیّرات میں یک درجی مساواتیں ہیں۔

اگر ہمیں 2لا + ما = 5 کا حل سیٹ معلوم کرنا ہو تو پہلے اسے ایک ایسی مترادف مساوات میں تبدیل کریں گے جس کی دائیں طرف صرف متغیّر ما یا صرف متغیّر لا ہو۔

مثلاً 2لا + ما = 5 ⟺ ما = 5 − 2لا

اب حاصل شدہ مساوات میں اگر لا کی جگہ صفر درج کریں تو ما کی متناظرہ قیمت 5 حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح اگر لا = 1 تو ما = 3

اگر لا = 2 تو ما = 1

اگر لا = −1 تو ما = 7

چنانچہ مساوات کو پورا کرنے والے لا اور ما کی قیمتوں کے چند مترتب جوڑے (0، 5)، (1، 3)، (2، 1)، (−1، 7) ہیں۔ ظاہر ہے کہ لا کی کسی بھی قیمت کے لیے ما کی متناظرہ قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔ لہٰذا مساوات کا حل سیٹ غیر متناہی مترتب جوڑوں پر مشتمل ہے۔ پس دو متغیّرات والی یک درجی مساوات کا حل سیٹ غیر متناہی ہوتا ہے۔

اب آپ مندرجہ ذیل مساواتوں پر غور کیجیے۔

{ لا − ما + 1 = 0
{ 3لا + 2ما − 2 = 0

یہ دو متغیّرات لا اور ما میں یک درجی مساواتوں کا نظام ہے۔

آپ کو معلوم ہے کہ دو متغیرات میں یک درجی مساوات کا حل سیٹ غیر متناہی مترتب جوڑوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان مساواتوں میں لا اور ما کی مختلف قیمتیں آزمانے سے معلوم ہوتا ہے کہ صرف (0،1) ایک ایسا مترتب جوڑا ہے جو دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پس {(0،1)} دی ہوئی مساواتوں کے نظام کا حل سیٹ ہے، لہٰذا مساواتوں کے نظام کے حل سیٹ سے مراد ایسے مترتب جوڑوں کا سیٹ ہوتا ہے۔ جس کا ہر رکن نظام کی ہر مساوات کو پورا کرے۔

اب ہم دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتوں کے نظام کا حل سیٹ معلوم کرنے کا طریقہ بتائیں گے۔

آپ جانتے ہیں کہ ایک متغیر والی یک درجی مساوات کو حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے اسے آسان تر مترادف مساواتوں میں تحویل کرتے جاتے ہیں۔ حتیٰ کہ متغیر کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ اسی طرح کسی نظام کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے بھی ہم اسے آسان تر مترادف نظام میں تحویل کر کے متغیرات کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مساواتوں کے ایسے نظام جن کے حل سیٹ مساوی ہوں، مترادف نظام کہلاتے ہیں۔

مثلاً

2لا − ما = 0
لا + ما = 6

اور

3لا + ما = 10
5لا − 2ما = 2

مترادف نظام ہیں۔ کیونکہ دونوں نظاموں کا حل سیٹ {(2، 4)} ہے۔ کسی دیے ہوئے نظام کو مترادف نظام میں تحویل کرنے کے لیے دو مسئلوں سے استفادہ کرتے ہیں۔ انھیں بغیر ثبوت کے درج کیا جاتا ہے۔

مسئلہ 1:

نظام

ما = م لا + ن
ا لا + ب ما + ج = 0

اور نظام

ما = م لا + ن
ا لا + ب (م لا + ن) + ج = 0

مترادف ہیں۔

اس مسئلہ کی رُو سے ہم پہلی مساوات سے ما کی قیمت دوسری مساوات میں ما کی جگہ رکھتے ہیں۔ اس طرح دوسری مساوات ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی صورت اختیار

کر لیتی ہے۔ اس کو حل کرنے سے لا کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ پھر لا کی حاصل شدہ قیمت پہلی مساوات میں درج کر کے ما کی متناظرہ قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔

مسئلہ 2:

نظام { ا لا + ب ما + ج = 0
      { س لا + ش ما + ص = 0

کی ہر ایک مساوات کی جگہ مندرجہ ذیل مساوات لی جا سکتی ہے۔

ک (ا لا + ب ما + ج) ± گ (س لا + ش ما + ص) = 0 جبکہ ک اور گ کوئی سے دو غیر صفر اعداد ہیں۔ دونوں مسئلوں کے استعمال کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1: نظام لا + ما − 2 = 0 اور 3لا + 2ما = 6 کا حل سیٹ معلوم کیجیے:

حل: { لا + ما − 2 = 0 ——— (1)
      { 3لا + 2ما = 6 ——— (2)

لا + ما − 2 = 0 ——— (1)

اس لیے ما = 2 − لا (مساوات کی دونوں اطراف میں 2 − لا جمع کیا)۔

اب ما کی قیمت مساوات (2) میں درج کریں تو

3لا + 2(2 − لا) = 6

یا 3لا + 4 − 2لا = 6

یا لا + 4 = 6

اس لیے لا = 2 (دونوں اطراف سے 4 تفریق کیا)

اب لا کی قیمت مساوات (1) میں درج کرنے سے

2 + ما − 2 = 0

اس لیے ما = 0

پس لا کی قیمت 2 اور ما کی قیمت 0 دونوں مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔

لہٰذا نظام کا حل سیٹ = {(2، 0)}

پڑتال: دونوں مساواتوں میں لا کی قیمت 2 اور ما کی قیمت 0 رکھی جائے تو مترتب جوڑا (2،0) دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پس نظام کا حل سیٹ {(2،0)} ہے۔
اب اسی نظام کو مسئلہ نمبر 2 کی مدد سے حل کریں گے۔

لا + ما = 2 ______ (1)
3لا + 2ما = 6 ______ (2)

مسئلہ 2 سے استفادہ کرنے کے لیے ہم مساوات (1) اور مساوات (2) کو ایسی مترادف مساواتوں میں تحویل کریں گے کہ دونوں مساواتوں میں کسی ایک متغیّر کی رقموں کے عددی سر برابر ہو جائیں۔ چنانچہ متغیّر ما کی رقموں کے عددی سر برابر کرنے کے لیے مساوات (1) کی طرفین کو 2 سے ضرب دے کر مترادف مساوات (3) حاصل کی۔

2لا + 2ما = 4 ______ (3)
±3لا ± 2ما =± 6 ______ (2)

—لا = —2 (مسئلہ (2) کی رُو سے مساوات (2) کو مساوات (3) میں سے تفریق کیا)۔

اس لیے لا = 2
اب لا کی قیمت مساوات (1) میں درج کرنے سے

2 + ما = 2
یا ما = 2 — 2 = 0
پس لا = 2 اور ما = 0
لہٰذا نظام کا حل سیٹ = {(2،0)}

مثال 2: مساواتوں کے نظام 3 لا + 7 ما = 10 اور 2 لا + 4 ما = 6 کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:
3 لا + 7 ما = 10 ______ (1)
2 لا + 4 ما = 6 ______ (2)

دونوں مساواتوں میں لا کے عددی سر برابر کرنے کے لیے مساوات (1) کو 2 سے اور مساوات (2) کو 3 سے ضرب دے کر مساوات (3) اور مساوات (4)

پر مشتمل مترادف نظام حاصل کیا۔

6لا + 14ما = 20 ——————— (3)

+6لا + 12ما = +18 ——————— (4)

− − −

2ما = 2 (مساوات (4) کے طرفین کو مساوات (3) کے طرفین میں سے تفریق کیا)

یا ما = 1

ما کی قیمت مساوات (2) میں درج کرنے سے

2لا + 4 = 6

اس لیے 2لا = 6 − 4 = 2

یا لا = 1

پس لا = 1 اور ما = 1

لہٰذا دیے ہوئے نظام کا حل سیٹ = { (1، 1) }

مشق 6.2

(1) کیا مترتب جوڑا (3، 1) مندرجہ ذیل کا حل ہے ؟ (زبانی)

(ا) لا − ما = 2

(ب) 3لا + 2ما = 11

(ج) نظام لا − ما = 2 اور 3لا + 2ما = 11

(2) الف اور با مساواتوں کے دو نظام ہیں۔ الف کا حل سیٹ { (4، 7) } اور با کا حل سیٹ { (4، 7) } ہے۔ کیا نظام الف نظام با کے مترادف ہے ؟

(3) مساواتوں کے نظام لام کا حل سیٹ { (3، 5) } ہے اور نظام میم کا حل سیٹ { (5، 3) } ہے۔ کیا نظام لام، نظام میم کے مترادف ہے ؟ دلیل کے ساتھ جواب دیجیے۔

مندرجہ ذیل نظاموں کے حل سیٹ معلوم کیجیے :

(4)
$$\text{لا} + 4\,\text{ما} = 1$$
$$\text{لا} + 7\,\text{ما} = 4$$

(5)
$$\text{لا} + 4\,\text{ما} = 1$$
$$3\,\text{ما} - \text{لا} = 13$$

(6)
$$2\,\text{لا} + \text{ما} = 7$$
$$\text{ما} - 3\,\text{لا} = 2$$

(7)
$$3\,\text{لا} + 2\,\text{ما} = 6$$
$$\text{لا} + \text{ما} = 2$$

(8)
$$2\,\text{لا} + \text{ما} - 3 = 0$$
$$\text{لا} - 2\,\text{ما} - 4 = 0$$

(9)
$$5\,\text{لا} + 9\,\text{ما} = 6$$
$$5\,\text{لا} - 9\,\text{ما} = 24$$

(10)
$$2\,\text{لا} + 10\,\text{ما} = 11$$
$$5\,\text{لا} - 4\,\text{ما} = 13$$

(11)
$$6\,\text{لا} - 5\,\text{ما} = 8$$
$$5\,\text{لا} - 6\,\text{ما} = 3$$

(12)
$$4\,\text{لا} + 9\,\text{ما} - 10 = 0$$
$$6\,\text{لا} - 7\,\text{ما} + 26 = 0$$

(13)
$$\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\text{ما}}{3} = 1\frac{3}{4}$$
$$\frac{\text{لا}}{3} + \frac{\text{ما}}{2} = 2$$

(14)
$$5\,\text{لا} - 2\,\text{ما} - 10 = 0$$
$$4\,\text{لا} + 3\,\text{ما} - 31 = 0$$

(15)
$$3\,\text{لا} = 4\,\text{ما}$$
$$4\,\text{لا} - 5\,\text{ما} = 1$$

6.3 عبارتی سوالات میں مساوات کا استعمال

پچھلی جماعت میں آپ بیانات کو الجبرے کی زبان میں لکھنا اور جبری جملوں کو عبارتوں میں بیان کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اب عبارتی سوالات کو مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کرنا سیکھیں گے۔ مثلاً ہمیں ایک عدد معلوم کرنا ہے جس کے تین گنا میں 7 جمع کرنے سے 58 حاصل ہوتا ہے۔ عبارت کو غور سے پڑھیں تو معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہی مقدار کو دو طریقوں سے بیان کیا گیا ہے۔ پہلا بیان "عدد کے تین گنا میں 7 جمع کیا" اور دوسرا بیان "مجموعہ 58 ہے"۔ اگر مطلوبہ عدد لا فرض کیا تو ان بیانات سے یہ جبری جملے حاصل ہوتے ہیں :

$3\,\text{لا} + 7$ اور مجموعہ 58

چونکہ عبارت میں دی ہوئی معلومات کے مطابق دونوں جملے ایک ہی مقدار کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے مساوات $3\,\text{لا} + 7 = 58$ حاصل ہوئی۔ مساوات کو حل کیا جائے تو لا کی قیمت

17 حاصل ہوتی ہے ۔ جو مطلوبہ عدد ہے ۔ پس عبارتی سوالوں کو حل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدام کیجیے ۔

(i) عبارت کو غور سے پڑھیے اور دیکھیے کہ آپ کو کیا معلوم کرنا ہے ۔

(ii) نامعلوم مقدار کو لا فرض کیجیے ۔

(iii) نامعلوم مقدار سے متعلق عبارت میں دیے ہوئے بیانات کو جبری جملوں میں تحویل کیجیے ۔

(iv) حاصل شدہ جبری جملوں کو مساوات کی صورت میں لکھیے ۔

(v) مساوات کو حل کر کے نامعلوم مقدار کی قیمت معلوم کیجیے ۔

(vi) جواب کی پڑتال کیجیے ۔ صحیح جواب عبارت میں دی ہوئی شرائط کو پورا کرے گا ۔

لہٰذا اوپر دیے ہوئے سوال کو اس طرح حل کریں گے ۔

فرض کیا مطلوبہ عدد = لا

عدد کے تین گنا میں 7 جمع کرنے سے 3 لا + 7 حاصل ہوا ۔

اب سوال کی شرط کے مطابق

$$58 = 7 + 3\text{لا}$$

یا $$51 = 7 - 58 = 3\text{لا}$$

یا $$\frac{51}{3} = \frac{3\text{لا}}{3}$$

یا $$17 = \text{لا}$$

پس مطلوبہ عدد = 17

پڑتال : $58 = 7 + 3 \times 17$

لہٰذا جواب درست ہے ۔

مثال 1 : نویں جماعت کے 45 طلبہ نے ریلیف فنڈ کے لیے 144 روپے چندہ جمع کیا ۔ کچھ لڑکوں نے 5 روپے فی کس کے حساب سے اور کچھ نے 2 روپے فی کس کے حساب سے چندہ دیا ۔ بتائیے کتنے لڑکوں نے 5 روپے اور کتنے لڑکوں نے 2 روپے فی کس کے حساب سے چندہ دیا ۔

حل : فرض کیا 5 روپے کے حساب سے چندہ دینے والے لڑکے = لا

اس لیے 2 روپے کے حساب سے چندہ دینے والے لڑکے = 45 − لا

لا طلبہ کا چندہ = 5 × لا = 5لا روپے

(45 − لا) طلبہ کا چندہ = 2(45 − لا) روپے

اس لیے سوال کی شرط کے مطابق مساوات حسب ذیل ہوئی ۔

$$5\text{لا} + 2(45 - \text{لا}) = 144$$

یا $5\text{لا} + 90 - 2\text{لا} = 144$

یا $3\text{لا} = 144 - 90 = 54$

یا $\text{لا} = \frac{54}{3} = 18$

اور $45 - 18 = 27$

پس 5 روپے کی شرح سے چندہ دینے والے طلبہ کی تعداد = 18

اور 2 روپے کی شرح سے چندہ دینے والے طلبہ کی تعداد = 27

پڑتال : $(5 \times 18) + (2 \times 27) = 144$

پس جواب درست ہے ۔

مثال 2 : ایک مستطیل باغ کا احاطہ 652 میٹر ہے ۔ اگر اس کی لمبائی ، چوڑائی سے 34 میٹر زیادہ ہو تو باغ کا طول اور عرض معلوم کیجیے ۔

حل : فرض کیا باغ کا عرض = لا میٹر

اس لیے باغ کا طول = (لا + 34) میٹر

باغ کا احاطہ = $2\text{لا} + 2(\text{لا} + 34) = 4\text{لا} + 68$

سوال میں دی گئی شرط کے مطابق مساوات حسب ذیل ہوئی ۔

$$4\text{لا} + 68 = 652$$

یا $4\text{لا} = 652 - 68 = 584$

یا $\frac{4\text{لا}}{4} = \frac{584}{4}$

یا $\text{لا} = \frac{584}{4} = 146$

پس باغ کا عرض = 146 میٹر

اور باغ کا طول = 146 + 34 = 180 میٹر

پڑتال : $2(180+146) = 652$

اور $180 - 146 = 34$

پس جواب درست ہے ۔

مشق 6.3

(1) دو اعداد کا مجموعہ لا ہے ۔ اگر ایک عدد 5 ہو تو دوسرا عدد بتائیے ۔

(2) ایک مستطیل کا طول عرض سے اڑھائی گنا ہے ۔ اگر عرض لا میٹر ہو تو طول بتائیے ۔

(3) دو سال پہلے میری عمر لا سال تھی ۔ بتائیے تین سال بعد میری عمر کتنی ہوگی؟

(4) لا ایک عدد ہے ۔ اس کے دگنے سے 7 کم عدد بتائیے ۔

(5) محمود کے پاس لا روپے ہیں اور اس کی بہن کے پاس محمود کی رقم کے نصف سے 3 روپے زائد ہیں ۔ بہن کی رقم کیا ہے ؟

(6) ایک عدد میں اکائی کا ہندسہ لا اور دھائی کا ہندسہ ما ہے ۔ عدد بتائیے ۔ اگر دونوں ہندسوں کی جگہ آپس میں بدل دی جائے تو حاصل شدہ عدد کیا ہوگا ؟

(7) لا سے اگلے تین عدد اس طرح لکھیے کہ ہر دو متصلہ اعداد میں 2 کا فرق ہو ۔

(8) ایک کنبے کا خوراک پر لا روپے ماہوار خرچ تھا ۔ 10 فیصد مہنگائی ہونے کے بعد اب ان کا ماہوار خرچ بتائیے ۔

مندرجہ ذیل سوالات میں جوابات کی پڑتال بھی کیجیے ۔

(9) میں نے ایک عدد سوچا ہے ۔ اگر اس کے چار گنا سے 15 تفریق کیا جائے تو جواب 29 آتا ہے ۔ عدد بتائیے ۔

(10) ایک عدد کا تین گنا اس عدد اور 60 کے مجموعہ کے مساوی ہے ۔ عدد معلوم کیجیے ۔

(11) دو متصلہ طاق اعداد کا مجموعہ 52 ہے ۔ اعداد دریافت کیجیے ۔

(12) تین متصلہ جفت اعداد کا مجموعہ 192 ہے ۔ اعداد دریافت کیجیے ۔

(13) ایک عدد کا پانچ گنا عدد کے دگنے سے بقدر 18 بڑا ہے۔ عدد بتائیے۔

(14) ایک مستطیل قطعہ اراضی کا طول عرض سے 11 میٹر زیادہ ہے۔ اگر اس کا احاطہ 122 میٹر ہو تو قطعہ کا طول اور عرض بتائیے۔

(15) کرکٹ کے میچ میں اکبر نے رشید سے تین گنا رنز بنائے۔ اگر دونوں نے مل کر 136 رنز بنائے ہوں تو ہر ایک کی علٰحدہ علٰحدہ رنز بتائیے۔

(16) باپ، بیٹا اور بیٹی مل کر 825 روپے ماہوار کماتے ہیں۔ اگر بھائی کی تنخواہ بہن کی تنخواہ سے 30 روپے زائد ہو اور باپ کی تنخواہ دونوں بچّوں کی تنخواہ کا ڈیڑھ گنا ہو تو تینوں کی الگ الگ آمدنی بتائیے۔

(17) 900 روپے کا منافع تین حصّہ دار احمد، قادر اور بشیر میں اس طرح تقسیم ہوا کہ قادر کو احمد سے 70 روپے زائد ملے اور بشیر کو قادر سے 160 روپے زیادہ ملے۔ بتائیے ہر ایک کو کتنے روپے ملے۔

(18) مثلث ا ب ج میں زاویہ ا کی مقدار زاویہ ب کی مقدار کا دگنا ہے۔ اگر زاویہ ج کی مقدار 45 درجے ہو تو زاویہ ا اور زاویہ ب کی مقداریں معلوم کیجیے۔

(19) ایک آدمی نے 16 کرسیاں اور 4 میزیں 700 روپے میں خریدیں۔ اگر میز کی قیمت کرسی کی قیمت کا تین گنا ہو تو ایک کرسی اور ایک میز کی الگ الگ قیمت دریافت کیجیے۔

(20) ثریا نے 2.5 میٹر گرم کپڑا اور 6.5 میٹر لٹھا 185.50 روپے میں خریدا۔ اگر گرم کپڑے کی قیمت لٹھے کی قیمت کا آٹھ گنا ہو تو دونوں کپڑوں کا بھاؤ بتائیے۔

(21) سکول کے بچّوں کو انعام دینے کے لیے 30 کتابیں 204 روپے میں خریدی گئیں۔ کچھ کتابوں کی قیمت 8 روپے فی کتاب تھی اور کچھ کی 6 روپے فی کتاب۔ بتائیے کتنی کتابیں 8 روپے والی اور کتنی 6 روپے والی تھیں۔

(22) ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ سے 3 زیادہ ہے۔ اگر شمار کنندہ میں 1 کم کر دیا جائے تو کسر $\frac{1}{2}$ کے مترادف ہو جاتی ہے۔ اصل کسر معلوم کیجیے۔

6.4 عبارتی سوالات میں دو متغیّر والی مساوات کا استعمال

مندرجہ ذیل عبارتی سوال کو غور سے پڑھیے۔

ایک مستطیل باغ کا احاطہ 652 میٹر ہے۔ اگر اس کی لمبائی، چوڑائی سے 34 میٹر زیادہ ہو تو باغ کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔

سوال میں دو نامعلوم مقداریں ہیں یعنی باغ کا طول اور باغ کا عرض۔ ان مقداروں کی قیمتیں ہمیں معلوم کرنا ہے۔ علاوہ ازیں عبارت میں دو شرائط بھی دی گئی ہیں۔ پہلی شرط یہ ہے کہ مستطیل باغ کا احاطہ 652 میٹر ہے اور دوسری شرط کے مطابق باغ کی لمبائی چوڑائی سے 34 میٹر زیادہ ہے۔ ان شرائط سے ہمیں دو مساواتیں مل سکتی ہیں۔ پس سوال کو حل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدام کیجیے۔

(i) عبارت کو غور سے پڑھیے اور دیکھیے کہ آپ کو کیا معلوم کرنا ہے۔

(ii) نامعلوم مقداروں کو لا اور ما فرض کیجیے۔

(iii) نامعلوم مقداروں سے متعلق عبارت میں دیئے گئے بیانات کو جملوں میں تحویل کیجیے۔

(iv) حاصل شدہ جملوں کو عبارت میں دی گئی شرائط کے مطابق مساواتوں کی صورت میں لکھیے۔

(v) حاصل شدہ مساواتوں کے نظام کو حل کر کے نامعلوم مقداروں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(vi) جواب کی پڑتال کیجیے۔ صحیح جواب عبارت میں دی ہوئی شرائط کو پُورا کرے گا۔

لہٰذا اُوپر دیے گئے عبارتی سوال کو اس طرح حل کریں گے۔

فرض کیا کہ باغ کا عرض = لا اور طول = ما

اس لیے باغ کا احاطہ = 2 لا + 2 ما

سوال کی شرائط کے مطابق 2 لا + 2 ما = 652 ——— (1)

اور لا + 34 = ما ——— (2)

مساواتوں (1) اور (2) کے نظام کو حل کرنے سے لا کی قیمت 146 اور ما کی قیمت 180 حاصل ہوگی۔ پس باغ کا طول = 180 میٹر اور عرض = 146 میٹر

مثال : ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں* کا مجموعہ 9 ہے۔ اگر ہندسوں کی ترتیب بدل دی جائے تو نیا عدد اصل عدد سے بقدر 45 زیادہ ہو جاتا ہے۔ اصل عدد بتائیے۔

حل : فرض کیا عدد میں اکائی کا ہندسہ = لا

اور دہائی کا ہندسہ = ما

اس لیے عدد = (لا + 10 ما)

ہندسوں کی ترتیب بدل جانے سے نیا عدد = (ما + 10 لا)

سوال کی شرائط کے مطابق

لا + ما = 9 ——— (1)

اور (ما + 10 لا) — (لا + 10 ما) = 45 ——— (2)

اس لیے 9 لا + 9 ما = 81 ——— (3) مساوات (1) کے طرفین کو 9 سے ضرب دی۔

اور 9 لا − 9 ما = 45 ——— (4)

پس 18 لا = 126 مساوات (3) اور (4) کو جمع کیا۔

یا لا = $\frac{126}{18}$ = 7

اور ما = 9−7 = 2

پس مطلوبہ عدد = 27

پڑتال : 7 + 2 = 9

اور 72 − 27 = 45

پس جواب درست ہے۔

---

* آسانی کی خاطر یہاں 'ہندسہ' بمعنی 'عدد' لیا گیا ہے۔

مشق 6.4

مندرجہ ذیل سوالات میں جوابات کی پڑتال بھی کیجیے۔

(1) ایسے دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 53 اور فرق 11 ہو۔

(2) دو اعداد کی اوسط 22 اور فرق 14 ہے۔ اعداد بتائیے۔

(3) دو اعداد کا مجموعہ 81 ہے۔ اگر چھوٹے عدد کا دگنا بڑے عدد میں جمع کیا جائے تو 116 حاصل ہوتا ہے۔ اعداد بتائیے۔

(4) دو اعداد کا مجموعہ 13 ہے۔ پہلے عدد کا پانچ گنا دوسرے عدد کے چھ گنا سے بقدر 10 زیادہ ہے۔ اعداد بتائیے۔

(5) ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 9 ہے۔ اگر ہندسوں کی جگہ آپس میں بدل دی جائے تو نیا عدد پہلے عدد سے بقدر 27 بڑھ جاتا ہے۔ اصل عدد معلوم کیجیے۔

(6) ایک کسر کے شمار کنندہ میں اگر 1 جمع کیا جائے تو حاصل شدہ کسر $\frac{1}{2}$ کے مترادف ہوتی ہے اور اگر نسب نما میں ایک جمع کیا جائے تو حاصل شدہ کسر $\frac{1}{3}$ کے مترادف ہوتی ہے۔ اصل کسر بتائیے۔

(7) ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 11 ہے۔ اگر ہندسوں کی ترتیب بدل دی جائے تو نیا عدد اصل عدد سے بقدر 63 کم ہو جاتا ہے۔ اصل عدد بتائیے۔

(8) دو سپلیمنٹری زاویوں کی ڈگری مقداریں معلوم کیجیے جبکہ ایک زاویے کی مقدار دوسرے زاویے کی مقدار سے 16 درجے کم ہے۔

(9) ایک مستطیل کھیل کے میدان کی چوڑائی، لمبائی سے 50 میٹر کم ہے۔ اگر اس کا احاطہ 1260 میٹر ہو تو میدان کی لمبائی اور چوڑائی دریافت کیجیے۔

(10) ایک مستطیل کی لمبائی 3 میٹر کم اور چوڑائی 3 میٹر زیادہ کر دی جائے تو شکل ایک مربع بن جاتی ہے۔ جس کا احاطہ 52 میٹر حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا طول اور عرض بتائیے۔

(11) 3 میزوں اور 8 کرسیوں کی قیمت 435 روپے ہے اور 2 میزوں او
5 کرسیوں کی قیمت 280 روپے ہے - ایک میز اور ایک کرسی کی الگ
الگ قیمت بتائیے -

(12) احمد نے 2 کلوگرام چینی اور $\frac{1}{2}$ کلوگرام چائے 17 روپے میں خریدی -
خالد نے 3 کلوگرام چینی اور 1 کلوگرام چائے 30.50 روپے میں خریدی -
چینی اور چائے کا الگ الگ بھاؤ دریافت کیجیے -

(13) ایک تھیلی میں 17 سکّے ، کچھ دس پیسے کے اور کچھ پانچ پیسے کے ہیں -
اگر تھیلی میں کل رقم 1.25 روپے ہو تو بتائیے اس میں کتنے سکّے دس پیسے
والے اور کتنے سکّے پانچ پیسے والے ہیں -

(14) ماں بیٹی کی عمروں کا مجموعہ 48 سال ہے - 2 سال کے بعد ماں کی عمر بیٹی
کی عمر سے تین گنا ہوگی - دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کریں -

(15) 5 سال پہلے ایک آدمی کی عمر اپنے بیٹے کی عمر کا سات گنا تھی اور 5
سال بعد اس کی عمر بیٹے کی عمر کا تین گنا ہوگی - دونوں کی موجودہ عمریں
دریافت کیجیے -

(16) ایک کشتی کی رفتار دریا کے بہاؤ کے ساتھ 10.7 کلومیٹر فی گھنٹہ اور دریا کے
بہاؤ کے خلاف 2.3 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے - کشتی کی کھڑے پانی میں رفتار اور
دریا کی رفتار معلوم کیجیے -

(17) ایک آدمی نے 76 کلومیٹر سفر ، کچھ ریل گاڑی کے ذریعے او کچھ بس کے
ذریعے ، ایک گھنٹہ 40 منٹ میں طے کیا - اگر گاڑی کی اوسط رفتار 60
کلومیٹر فی گھنٹہ اور بس کی اوسط رفتار 40 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو بتائیے
اس نے کتنا فاصلہ گاڑی سے اور کتنا فاصلہ بس سے طے کیا -

(18) ایک آدمی نے دو آموں کے ٹوکرے 144 روپے میں خرید کر ایک ٹوکرے
کو 10 فیصد نفع پر اور دوسرے کو 20 فیصد نفع پر بیچ دیا - اس طرح
اسے کُل 20.80 روپے نفع ہوا - دونوں ٹوکروں کی الگ الگ قیمتِ خرید
بتائیے -

(19) ایک تاجر نے کچھ چاول اور کچھ گندم خریدی - اگر چاول کو 10 فیصد نفع اور گندم کو 5 فیصد نفع پر بیچے تو اُسے کل 50 روپے نفع ہوگا - اگر چاول کو 5 فیصد نفع اور گندم کو 10 فیصد نفع پر بیچے تو کل 55 روپے نفع ہوگا - چاول اور گندم کی علٰحدہ علٰحدہ قیمتِ خرید بتائیے -

(20) ایک آدمی نے دو بکریاں 322 روپے کی خریدیں - ایک کو 20 فیصد نفع پر اور دوسری کو 10 فیصد نقصان پر فروخت کیا - دونوں صورتوں میں ایک ہی قیمت وصول ہوئی - ہر ایک بکری کی قیمتِ خرید دریافت کیجیے -

(21) ایک موٹر کشتی کی رفتار دریا کے بہاؤ کے ساتھ 18.6 کلومیٹر فی گھنٹہ اور دریا کے بہاؤ کے خلاف 14.2 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے - کشتی کی کھڑے پانی میں رفتار اور دریا کی رفتار معلوم کیجیے -

---

باب 7

بنیادی ہندسی تصوّرات

مزید ہندسی تصوّرات سیکھنے سے پہلے ہم چھٹی اور ساتویں جماعتوں میں سیکھے ہوئے تصوّرات کا اعادہ کریں گے ۔

7.1 درمیان ہونے کا تصوّر

خط اب پر نقطہ ج نقاط ا اور ب کے درمیان ہوگا اگر

م اج + م ج ب = م اب



م اج سے مراد نقطہ ا سے نقطہ ج تک کے فاصلہ کی مقدار ہے ۔ اسی طرح م ج ب سے مراد نقطہ ج سے نقطہ ب تک کے فاصلہ کی مقدار ہے ۔ "م" سے مراد "مقدار" ہے ۔

درمیان ہونے کا تصوّر صرف ہم خط نقاط سے وابستہ ہے اس لیے نقاط ا ، ب اور ج کا ہم خط ہونا ضروری ہے ۔ ہم خط نقاط کا مطلب ہے کہ دیے ہوئے نقاط ایک ہی خط پر واقع ہیں یا ان نقاط میں سے ایک ہی خط گزرتا ہے ۔

مثلاً نقاط ک ، گ ، ل میں سے کسی بھی ایک نقطہ کے بارے میں یہ نہیں بتا سکتے کہ کون سا نقطہ باقی دو نقاط کے درمیان واقع ہے ، کیونکہ ک ، گ اور ل ہم خط نہیں ہیں ۔

گ ک

ل

7.2 قطعہ خط

قطعہ خط ا ب نقاط کا ایسا سیٹ ہے جس میں شامل ہیں :

(i) نقاط ا ، ب



اور (ii) وہ تمام نقاط جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں۔
"قطعہ خط ا ب" کو علامتی طور پر "$\overline{\text{ا ب}}$" لکھتے ہیں۔
اس لیے $\overline{\text{ا ب}}$ = {ا ، ب} U {ا اور ب کے درمیان واقع تمام نقاط}
نقاط ا ، ب قطعہ خط ا ب کے سرے کہلاتے ہیں۔



7.3 پرے کا تصوّر

اگر ا ، ب ، ج کوئی سے تین ہم خط نقاط ہوں اس طرح کہ نقطہ ب نقاط ا اور ج کے درمیان ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ پر نقطہ ج نقطہ ب سے پرے ہے۔
سامنے کی شکل میں $\overleftrightarrow{\text{ک ل}}$ پر نقطہ گ
نقطہ ل سے پرے ہے۔



7.4 شعاع

شعاع ا ب نقاط کا ایسا سیٹ ہے جس میں شامل ہیں:
(i) $\overline{\text{ا ب}}$ اور



(ii) وہ تمام نقاط

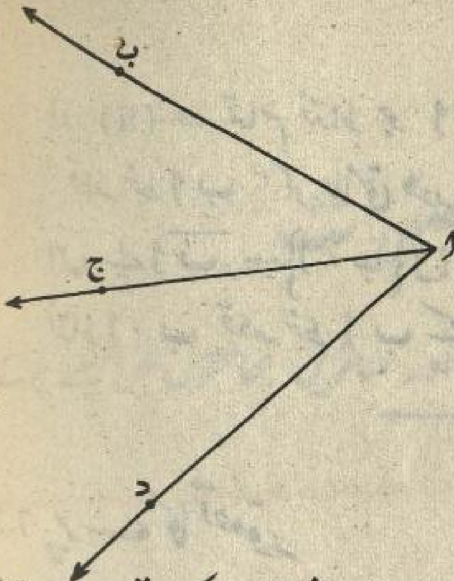
جو $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ پر نقطہ ب سے پرے واقع ہیں۔
"شعاع ا ب" کو علامتی طور پر "$\overleftarrow{\text{ا ب}}$" لکھتے ہیں۔
نقطہ ا شعاع ا ب کا سرا کہلاتا ہے۔
یا $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ = $\overline{\text{ا ب}}$ U {تمام نقاط جو $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ پر نقطہ ب سے پرے ہیں}

7.5 نصف خط

شعاع ا ب کے سرا ا کے علاوہ باقی تمام نقاط کا
سیٹ نصف خط ا ب کہلاتا ہے۔



"نصف خط ا ب" کو علامتی طور پر "ا ب" لکھتے ہیں۔



7.6 (i) **ہم سرا شعاعیں**

ایسی شعاعیں جن کا سرا مشترک ہو ہم سرا شعاعیں کہلاتی ہیں ۔ مثلاً
اب ، اج اور اد ہم سرا شعاعیں ہیں۔

(ii) **ہم خط شعاعیں**

ایسی شعاعیں جو ایک ہی خط کے تحتی سیٹ ہوں ہم خط شعاعیں کہلاتی ہیں ۔ مثلاً
ک گ اور ل م ہم خط شعاعیں ہیں مگر ہم سرا نہیں کیونکہ ک گ کا سرا ک ہے ۔ جبکہ



ل م کا سرا ل ہے۔

د س اور د ر ہم خط اور ہم سرا شعاعیں ہیں ۔ کیونکہ دونوں کا سرا د ہے۔



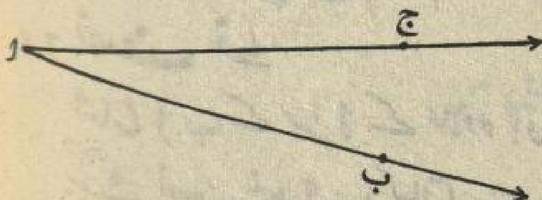
(iii) **غیر ہم خط شعاعیں**

ایسی شعاعیں جو ایک ہی خط کے تحتی سیٹ نہ ہوں غیر ہم خط شعاعیں کہلاتی ہیں ۔ مثلاً ت ل اور
اج غیر ہم خط شعاعیں ہیں۔





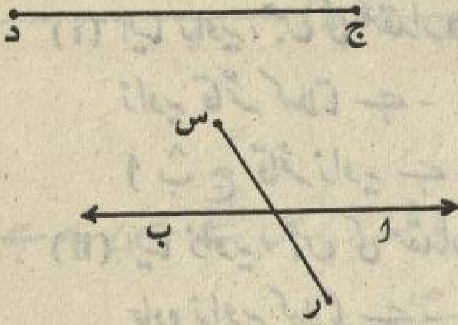
7.7 (i) **زاویہ**



دو ہم سرا غیر ہم خط شعاعوں کا یونین زاویہ کہلاتا ہے ۔ شکل میں اج اور اب کا مشترک سرا
ا ہے اور یہ دونوں غیر ہم خط شعاعیں ہیں ۔ اس لیے ان کا یونین ایک زاویہ ہے ۔ یہ

زاویہ ب ا ج ہے۔" زاویہ ب ا ج" کو لکھتے ہیں۔" ب اَ ج"۔ ب اَ ج کو ج اَ ب بھی لکھ سکتے ہیں۔ ب اَ ج کو" اَ" بھی لکھ سکتے ہیں۔ اَ کو پڑھتے ہیں" زاویہ ا"۔ نقطہ ا زاویہ ب ا ج کا راس کہلاتا ہے۔ جبکہ اب اور اج زاویہ کے بازو کہلاتے ہیں۔

(2) خط کے ایک ہی طرف اور مخالف طرفوں پر واقع نقاط

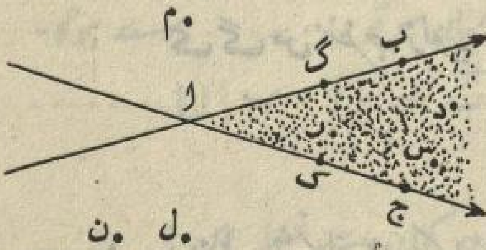


(i) کوئی سے دو نقاط ج ، د کسی خط اب کے ایک ہی طرف واقع ہوں گے۔ اگر ج د خط ا ب کو قطع نہ کرے اور

(ii) کوئی سے دو نقاط س ، ر خط ا ب کی مخالف طرفوں پر واقع ہوں گے اگر س ر خط ا ب کو قطع کرے۔

(3) زاویے کا اندرونہ و بیرونہ

کوئی نقطہ د زاویہ ب ا ج کے اندر واقع ہوگا اگر



(i) نقاط ب ، د خط ا ج کے ایک ہی طرف واقع ہوں اور

(ii) نقاط ج ، د خط ا ب کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

ان تمام نقاط کا سیٹ جو زاویہ ب ا ج کے اندر واقع ہوں زاویہ ب ا ج کا اندرونہ کہلاتا ہے۔ ان تمام نقاط کا سیٹ، جو نہ زاویے کے اندر واقع ہوں اور نہ زاویے کے بازوؤں پر، زاویے کا بیرونہ کہلاتا ہے۔

(i) نقاط د ، س ، ر زاویے کے اندرونہ میں واقع ہیں جبکہ

(ii) نقاط ا ، ب ، ج ، ک ، گ زاویے کے بازوؤں پر واقع ہیں اور

(iii) نقاط ل ، م ، ن زاویے کے بیرونہ میں واقع ہیں۔

(4) زاویے کی قسمیں

زاویے کی مقدار کی اکائی کو ڈگری یا درجہ کہتے ہیں ۔ ہر زاویے کی ڈگری مقدار 0 اور 180 کے درمیان ہوتی ہے ۔

(i) ایسا زاویہ، جس کی مقدار °90 کے برابر ہو زاویہ قائمہ کہلاتا ہے ۔

ا بˆ ج قائمہ زاویہ ہے ۔

(ii) ایسا زاویہ، جس کی مقدار °90 سے کم ہو حادہ زاویہ کہلاتا ہے ۔

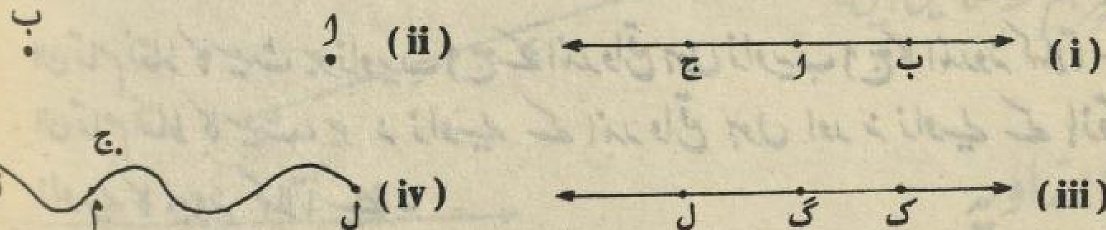
ل مˆ ن حادہ زاویہ ہے ۔

(iii) ایسا زاویہ، جس کی مقدار °90 سے زیادہ مگر °180 سے کم ہو منفرجہ زاویہ کہلاتا ہے ۔

ک گ س منفرجہ زاویہ ہے ۔

مشق 7.1

(1) مندرجہ ذیل اشکال میں کون سا نقطہ باقی دو کے درمیان ہے ؟

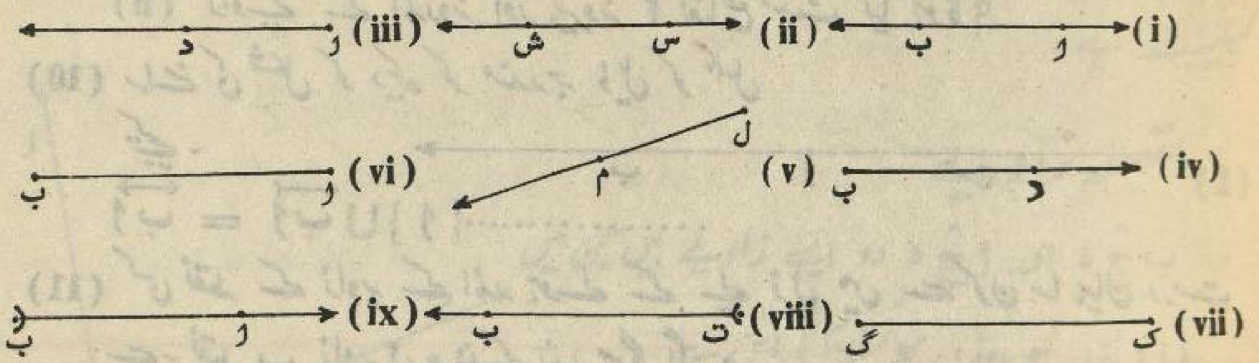


(2) کتنے سرے ہوتے ہیں ؟

(ا) خط کے (ب) قطعہ خط کے

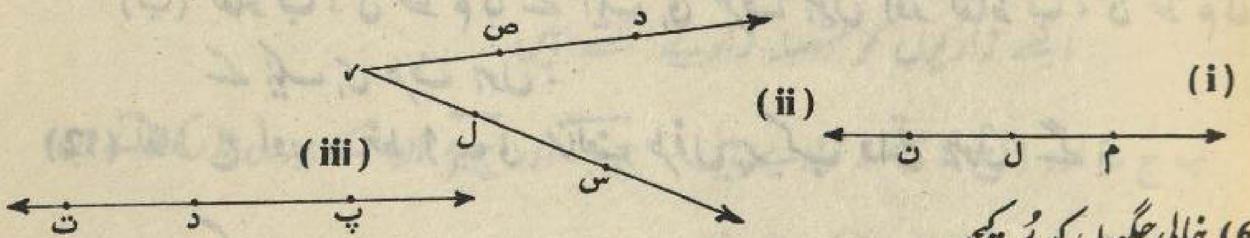
(ج) شعاع کے

(3) مندرجہ ذیل اشکال کے نام الفاظ اور علامتوں میں لکھیے۔



(4) کیا ہم خط شعاعیں ہم سرا بھی ہو سکتی ہیں ؟

(5) مندرجہ ذیل اشکال میں بتائیے کہ کون سا نقطہ کس خط یا شعاع پر کس نقطے سے پرے ہے؟



(6) خالی جگھوں کو پُر کیجیے۔

(i) اگر م $\overline{\text{اب}}$ + م $\overline{\text{ب ج}}$ = م $\overline{\text{اج}}$ تو ....

(ii) اگر $\overleftrightarrow{\text{ک ل}}$ پر نقطہ ل نقاط ک اور م کے درمیان ہو تو .... پرے ہوگا۔

(iii) $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ = $\overrightarrow{\text{اب}}$ U .... (iv) $\overline{\text{اب}}$ = {ا ، ب} U ....

(7) ہم سرا اور ہم خط شعاعوں میں کیا فرق ہے ؟

(8) مندرجہ ذیل میں سے کون سے بیانات درست اور کون سے غلط ہیں ؟

(i) زاویہ دو ہم سرا ہم خط شعاعوں کا یونین ہوتا ہے۔

(ii) زاویہ دو ہم سرا غیر ہم خط شعاعوں کا یونین ہوتا ہے۔

(iii) حادہ زاویہ کی مقدار °90 کے برابر ہوتی ہے۔

(iv) حادہ زاویہ کی مقدار °90 سے کم ہوتی ہے۔

(v) منفرجہ زاویہ کی مقدار °90 سے زیادہ ہوتی ہے۔

(vi) منفرجہ زاویہ کی مقدار °90 سے کم ہوتی ہے۔

(vii) زاویہ قائمہ °90 کی مقدار کا زاویہ ہوتا ہے۔

(9) (i) وہ نقاط بتائیے جو نہ زاویے کے اندرونہ میں ہوں اور نہ ہی بیرونہ میں۔
(ii) زاویے کے اندرونہ اور بیرونہ کا تقاطع سیٹ کیا ہوگا؟
(10) سامنے کی شکل کو دیکھ کر مندرجہ ذیل کو مکمل کیجیے۔

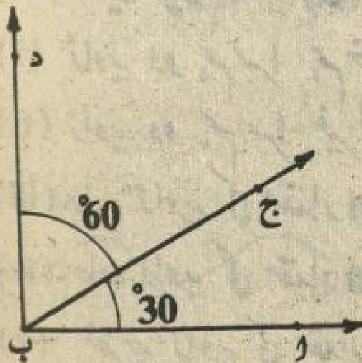


اب = اب U { ا } ....

(11) کسی نقطہ کے زاویہ کے اندر ہونے کے لیے ذیل میں سے کون سا بیان درست ہے۔ نقطہ ب زاویہ ل م ن کے اندر ہوگا اگر:
(ا) نقاط ب، ل خط م ن کی مخالف طرفوں میں ہوں اور نقاط ب، ن خط م ل کی مخالف طرفوں میں ہوں۔
(ب) نقاط ب، ل خط م ن کے ایک ہی طرف ہوں اور نقاط ب، ن خط م ل کے ایک ہی طرف ہوں۔
(12) نقاط ج اور د خط اب کی مخالف طرفوں پر کب واقع ہوں گے؟

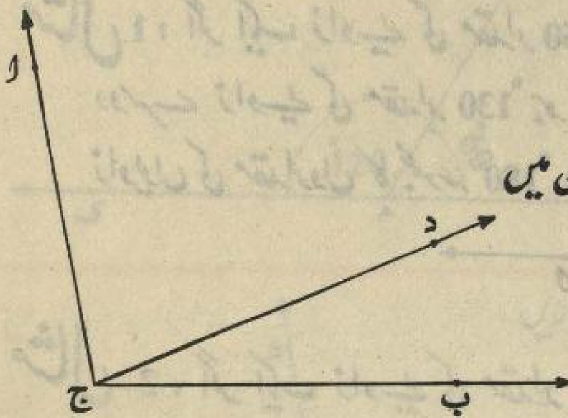
7.8 (1) کمپلیمنٹری زاویے

(i) اگر ایک زاویے کی مقدار °60 اور دوسرے کی مقدار °30 ہو تو ان زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ °90 ہوگا۔
(ii) اسی طرح °40 اور °50 کے زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ بھی °90 ہوگا۔
اس قسم کے زاویوں کو کمپلیمنٹری زاویے کہتے ہیں۔ پس



"اگر دو زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ °90 ہو تو ایسے زاویے کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔
مثلاً سامنے کی شکل میں ا بˆ ج اور ج بˆ د کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔
ایسے دونوں زاویوں کو ایک دوسرے کا کمپلیمنٹ کہتے ہیں۔ یعنی °30 کا زاویہ °60 کے زاویے کا اور °60 کا زاویہ °30 کے زاویے کا کمپلیمنٹ ہے۔

اسی طرح °20 کا زاویہ °70 کے زاویے کا اور °70 کا زاویہ °20 کے زاویے کا کمپلیمنٹ ہے۔



(2) متصلہ زاویے

ب ج^ د اور ا ج^ د دو ایسے زاویے ہیں جن میں

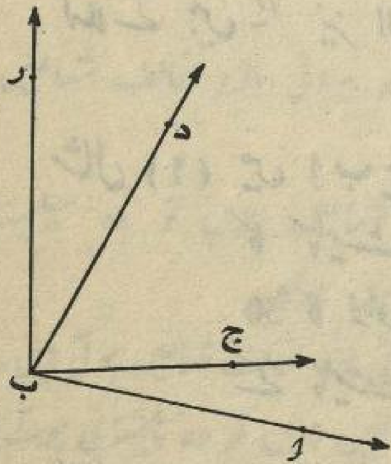
(i) نقطہ ج دونوں کا مشترک راس ہے۔

(ii) ج د ایک مشترک بازو ہے اور

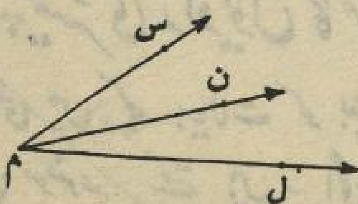
(iii) ان کے اندرونوں کا تقاطع خالی سیٹ ہے۔

ایسے زاویوں کو متصلہ زاویے کہتے ہیں۔

ب ج^ د اور ا ج^ د متصلہ زاویے ہیں۔ ج ب اور ج ا ان کے بیرونی بازو کہلاتے ہیں۔



ا ب^ ج اور ر ب^ د کا مشترک راس نقطہ ب ہے اور اُن کے اندرونوں کا تقاطع خالی سیٹ ہے لیکن دونوں زاویوں کا کوئی بازو مشترک نہیں ہے۔ اس لیے یہ دونوں زاویے متصلہ نہیں ہیں۔

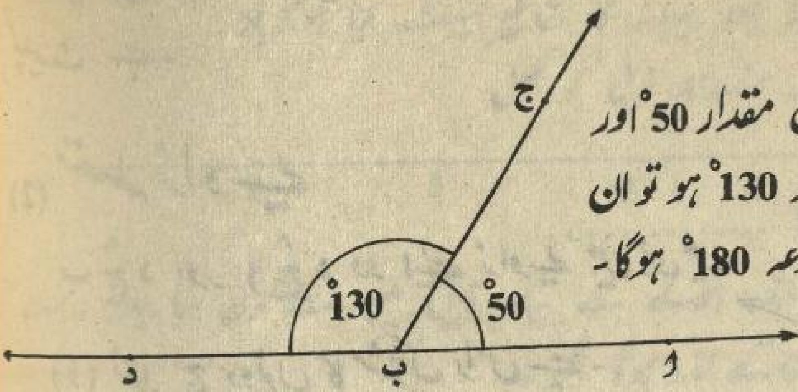


ل م^ ن اور ل م^ س کا مشترک راس نقطہ م ہے اور مشترک بازو م ل ہے لیکن دونوں زاویوں کے اندرونوں کا تقاطع خالی سیٹ نہیں ہے۔ (کیونکہ ل م^ ن کا اندرونہ ل م^ س کے اندرونہ میں بھی شامل ہوگا۔ یعنی دونوں زاویوں کے اندرونوں کا تقاطع خالی سیٹ نہیں ہے)۔

اس لیے ل م^ ن اور ل م^ س متصلہ زاویے نہیں ہیں۔

البتہ ل م^ ن اور س م^ ن متصلہ زاویے ہیں۔

(3) سپلیمنٹری زاویے



مثال 1 : اگر ایک زاویے کی مقدار 50° اور دوسرے زاویے کی مقدار 130° ہو تو ان زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوگا۔

مثال 2 : اگر ایک زاویے کی مقدار 70° اور دوسرے زاویے کی مقدار 110° ہو تو ان کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوگا۔

ایسے زاویوں کے جوڑے سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

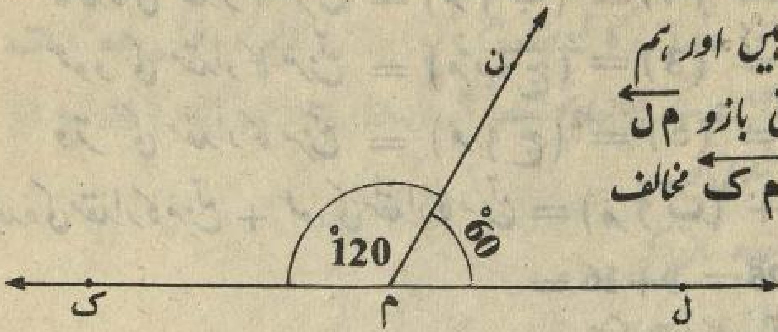
"اگر دو زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہو تو ایسے زاویے سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔" نیز ان میں ہر زاویہ دوسرے کا سپلیمنٹ ہوگا۔

مثال (1) میں ا ب ج اور د ب ج سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ یعنی 50° کے زاویے کا سپلیمنٹ 130° کا زاویہ ہے اور 130° کے زاویے کا سپلیمنٹ 50° کا زاویہ ہے۔ اسی طرح 70° اور 110° کے زاویے ایک دوسرے کے سپلیمنٹ ہیں۔

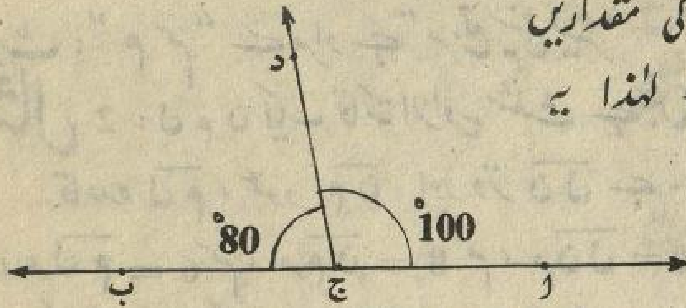
7.9 سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ

ریاضی میں کچھ بیانات کو بغیر ثبوت کے تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ ایسے بیانات کو اصولِ موضوعہ کہتے ہیں۔ اگلی جماعتوں میں آپ ان کے بارے میں تفصیل سے پڑھیں گے۔ یہاں ہم ایک اصولِ موضوعہ بیان کرتے ہیں جسے سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ کہتے ہیں۔

مثال (1): ل مْ ن اور ک مْ ن دو متصلہ زاویے ہیں۔
نیز یہ زاویے سپلیمنٹری بھی ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ل مْ ن کا بیرونی بازو م ل اور ک مْ ن کا بیرونی بازو م ک مخالف شعاعیں ہیں۔



مثال (2): اجْ د اور ب جْ د کی مقداریں ترتیب وار 100° اور 80° ہیں۔ لہٰذا یہ سپلیمنٹری زاویے ہیں اور ان کے بیرونی بازو ج ا اور ج ب مخالف شعاعیں ہیں اور یہ دونوں زاویے متصلہ بھی ہیں۔

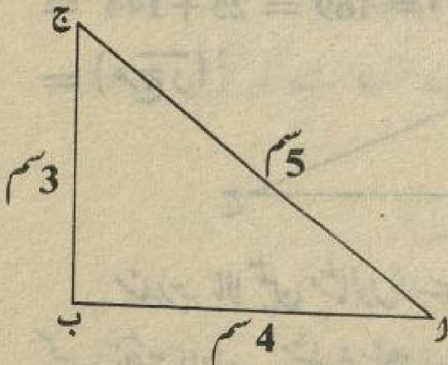


ان مثالوں سے یہ بات ہمارے سامنے آتی ہے کہ:

(i) اگر دو متصلہ زاویے سپلیمنٹری ہوں تو اُن کے بیرونی بازو مخالف شعاعیں ہوتی ہیں، اور

(ii) اگر دو متصلہ زاویوں کے بیرونی بازو مخالف شعاعیں ہوں تو وہ سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ پس سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ یوں ہوگا۔

"(ا) اگر دو متصلہ زاویے سپلیمنٹری ہوں تو اُن کے بیرونی بازو مخالف شعاعیں ہوتی ہیں۔ اور
(ب) اگر دو متصلہ زاویوں کے بیرونی بازو مخالف شعاعیں ہوں تو وہ سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔"



7.10 (1) مسئلہ فیثا غورث

مثال 1: اب ج ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے، جس کا قاعدہ اب، عمود ب ج اور وتر ا ج ہے۔
اس مثلث میں

م ا ب = 4 سم ، م ب ج = 3 سم ، م ا ج = 5 سم

قاعدہ کی مقدار کا مربع = (م اب)^2 = (4)^2 = 16 سم

عمود کی مقدار کا مربع = (م ب ج)^2 = (3)^2 = 9 سم

وتر کی مقدار کا مربع = (م ا ج)^2 = (5)^2 = 25 سم

قاعدہ کی مقدار کا مربع + عمود کی مقدار کا مربع = (م اب)^2 + (م ب ج)^2

= 16 + 9 = 25 م سم

وتر کی مقدار کا مربع

نوٹ : "م سم" سے مراد ہے "مربع سینٹی میٹر"

مثال 2 : ل م ن ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا

قاعدہ ل م ، عمود م ن اور وتر ن ل ہے۔

اور مر ل م = 6 سم ، مر م ن = 8 سم ، مر ن ل = 10 سم

قاعدہ کی مقدار کا مربع = (مر ل م)^2 = (6)^2 = 36 م سم

عمود کی مقدار کا مربع = (مر م ن)^2 = (8)^2 = 64 م سم

وتر کی مقدار کا مربع = (مر ن ل)^2 = (10)^2 = 100 م سم

قاعدہ کی مقدار کا مربع + عمود کی مقدار کا مربع = (مر ل م)^2 + (مر م ن)^2

= 36 + 64 = 100 م سم = وتر کی مقدار کا مربع

ن

10 سم

8

م

6 سم

ل

مثال 3 : قائمۃ الزاویہ مثلث ج د ر میں قاعدہ ج د کی مقدار = 12 سم

عمود د ر کی مقدار = 5 سم اور وتر ج ر کی مقدار = 13 سم اور

(مر ج د)^2 + (مر د ر)^2 = (12)^2 + (5)^2

= 144 + 25 = 169 = (13)^2

= (مر ج ر)^2

ر

13 سم

5

ج

د

12 سم

مندرجہ بالا تین مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ

کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں

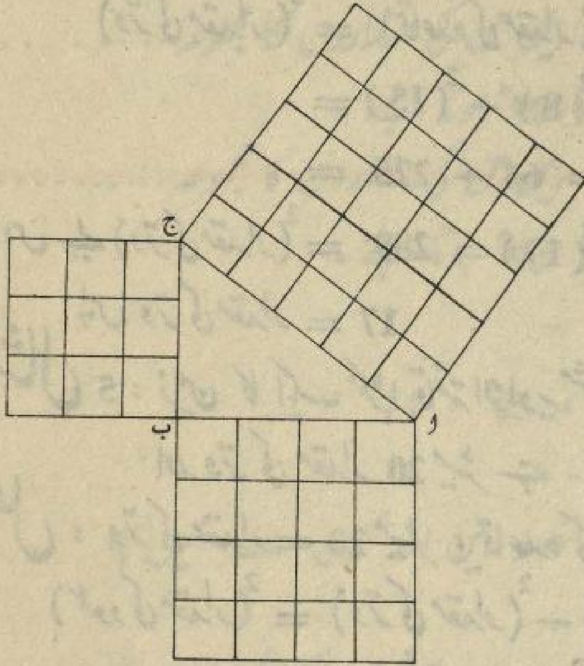
(قاعدہ کی مقدار)^2 + (عمود کی مقدار)^2 = (وتر کی مقدار)^2

عمود

وتر

قاعدہ

اس مسئلے کو **فیثاغورث** نامی ایک ریاضی دان کے نام پر "مسئلہ فیثاغورث" کہتے ہیں (کیونکہ فیثاغورث نے یہ مسئلہ دریافت کیا اور اسی نے اس کا ثبوت پیش کیا)۔ اس مسئلے کو دلائل سے ثابت کرنے کا طریقہ آپ اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے یہاں صرف شکل کی مدد سے اس مسئلے کا ثبوت دیا جا رہا ہے۔ مثلاً پہلی مثال میں دی ہوئی مثلث لیں۔



قاعدہ $\overline{اب}$ کو ایک مربّع کا قاعدہ مان کر 4 سم ضلع کا ایک مربّع بنائیں اور اس میں 1 سم مربّع کے خانے بنائیں (1 سم مربّع کا مطلب ہے ایک ایسا مربّع جس کے ضلع کی لمبائی 1 سم ہو)۔

اسی طرح آپ دیکھیں گے کہ ایک سم مربّع کے 16 خانے بنتے ہیں۔

اسی طرح عمود اور وتر پر مربّعے بنائیں۔

اب ان مربّعوں کو 1 سم مربّع خانوں میں تقسیم کریں۔ عمود پر مربّع میں ایسے خانوں کی تعداد 9 اور وتر پر مربّع میں ان کی تعداد 25 ہے۔

اب قاعدہ پر کے مربّع کے خانوں کی تعداد + عمود پر کے مربّع کے خانوں کی تعداد

= 16 + 9

= 25 = وتر پر کے مربّع کے خانوں کی تعداد

پس مسئلہ فیثاغورث کی رو سے، کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں

(قاعدہ کی مقدار)^2 + (عمود کی مقدار کا مربّع)^2 = (وتر کی مقدار)^2

ہم دیکھتے ہیں کہ اس مسئلے میں تین مقداریں استعمال ہو رہی ہیں اس لیے اگر کوئی سی دو مقداریں دی ہوئی ہوں تو ہم تیسری مقدار معلوم کر سکتے ہیں۔

(وتر کی مقدار)^2 = (قاعدہ کی مقدار)^2 + (عمود کی مقدار)^2

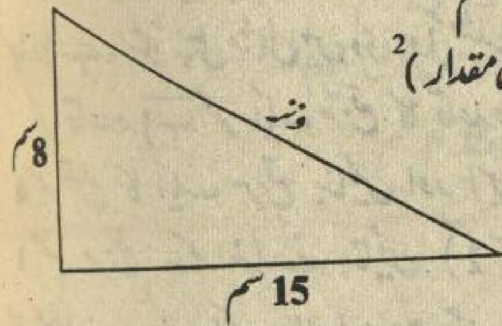
اس لیے (قاعدہ کی مقدار)^2 = (وتر کی مقدار)^2 − (عمود کی مقدار)^2

(عمود کی مقدار)^2 = (وتر کی مقدار)^2 − (قاعدہ کی مقدار)^2

اب ہم ان کلیوں کی مدد سے کچھ سوالات حل کریں گے۔

مثال 4 : ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار 15 سم اور عمود کی مقدار 8 سم ہے۔ وتر کی مقدار معلوم کیجیے۔

حل : قاعدہ کی مقدار = 15 سم، عمود کی مقدار = 8 سم



^{2}(وتر کی مقدار) = ^{2}(قاعدہ کی مقدار) + ^{2}(عمود کی مقدار)

$= (15)^2 + (8)^2$

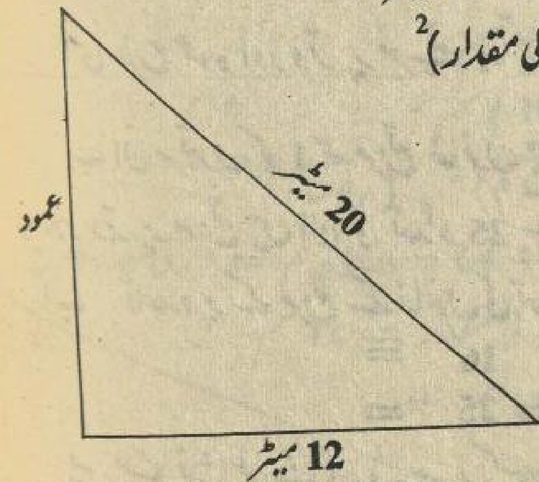
$= 225 + 64 = 289$

اس لیے ^{2}(وتر کی مقدار) $= 289 = (17)^2$

پس وتر کی مقدار = 17

مثال 5 : زمین کا ایک ٹکڑا قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کا ہے جس کے قاعدہ کی مقدار 12 میٹر اور وتر کی مقدار 20 میٹر ہے۔ عمود کی مقدار معلوم کریں۔

حل : وتر کی مقدار = 20 میٹر ، قاعدہ کی مقدار = 12 میٹر



^{2}(عمود کی مقدار) = ^{2}(وتر کی مقدار) − ^{2}(قاعدہ کی مقدار)

$= (20)^2 - (12)^2$

$= 400 - 144$

$= 256$

اس لیے ^{2}(عمود کی مقدار) $= 256 = (16)^2$

عمود کی مقدار $= \sqrt{256} = 16$

پس عمود کی مقدار = 16 میٹر

مثال 6 : قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کے ایک پلاٹ کے وتر کی مقدار 25 میٹر اور عمود کی مقدار 15 میٹر ہے۔ پلاٹ کے قاعدہ کی مقدار معلوم کریں۔

حل : وتر کی مقدار = 25 میٹر عمود کی مقدار = 15 میٹر

^{2}(قاعدہ کی مقدار) = ^{2}(وتر کی مقدار) − ^{2}(عمود کی مقدار)

$= (25)^2 - (15)^2$

$= 625 - 225 = 400$

پس قاعدہ کی مقدار $= \sqrt{400} = 20$ میٹر

مشق 7.2

ا یا ب سے خالی جگہ اس طرح پُر کریں کہ بیان درست بن جائے۔

(1) کمپلیمنٹری زاویے دو ایسے زاویے ہوتے ہیں جن کی مقداروں کا مجموعہ ....

(ا) 180° ہوتا ہے۔ (ب) 90° ہوتا ہے۔

(2) سپلیمنٹری زاویے دو ایسے زاویے ہوتے ہیں جن کی مقداروں کا مجموعہ ....

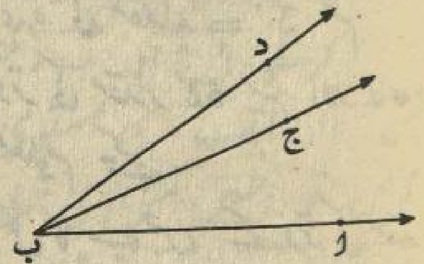
(ا) 180° ہوتا ہے۔ (ب) 90° ہوتا ہے۔

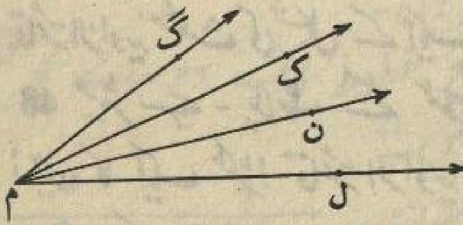
(3) مندرجہ ذیل زاویوں کے کمپلیمنٹ لکھیے۔

35° ، 40° ، 45° ، 65° ، 74°

(4) دو زاویے کب منتصل ہوتے ہیں؟

مندرجہ ذیل میں سے کون سے زاویے منتصل ہیں اور کون سے نہیں؟





(5) (i) ا ب̂ ج ، د ب̂ ج

(ii) ا ب̂ ج ، ا ب̂ د

(6) (i) ل م̂ ن ، گ م̂ ک

(ii) ل م̂ ن ، ک م̂ ن

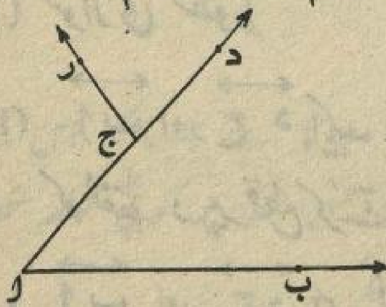
(iii) ل م̂ ک ، گ م̂ ک

(7) ب اْ د ، ر ج̂ د

(8) (i) ا ژ̂ د ، ج ژ̂ ب

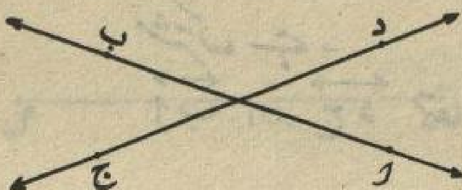
(ii) د ژ̂ ب ، ج ژ̂ ب

(iii) ا ژ̂ د ، ب ژ̂ د



(9) مندرجہ ذیل زاویوں کے سپلیمنٹ معلوم کیجیے۔

45° ، 35° ، 85° ، 93° ، 107°



(10) قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی مقدار معلوم کریں جبکہ :

(i) قاعدہ کی مقدار = 12 سم ، عمود کی مقدار = 16 سم

(ii) قاعدہ کی مقدار = 2 سم ، عمود کی مقدار = 1.5 سم

(iii) قاعدہ کی مقدار = 4.8 سم ، عمود کی مقدار = 2 سم

(11) قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار معلوم کریں جبکہ :

(i) وتر کی مقدار = 17 سم ، عمود کی مقدار = 8 سم

(ii) وتر کی مقدار = 10 سم ، عمود کی مقدار = 8 سم

(iii) وتر کی مقدار = 3.4 سم ، عمود کی مقدار = 1.6 سم

(12) قائمۃ الزاویہ مثلث کے عمود کی مقدار معلوم کریں جبکہ :

(i) وتر کی مقدار = 5 سم ، قاعدہ کی مقدار = 3 سم

(ii) وتر کی مقدار = 13 سم ، قاعدہ کی مقدار = 12 سم

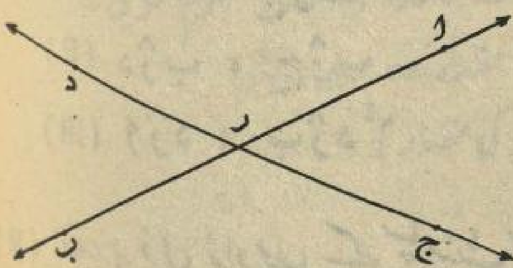
(iii) وتر کی مقدار = 3.4 سم ، قاعدہ کی مقدار = 3 سم

(13) قائمۃ الزاویہ مثلث کی شکل کے ایک پلاٹ کے وتر کی مقدار 52 میٹر اور قاعدہ کی مقدار 48 میٹر ہے ۔ پلاٹ کے عمود کی مقدار معلوم کیجیے ۔

(14) زمین کا ایک ٹکڑا قائمۃ الزاویہ مثلث کی شکل کا ہے جس کے وتر کی مقدار 34 میٹر اور عمود کی مقدار 16 میٹر ہے ۔ قاعدہ کی مقدار معلوم کیجیے ۔

7.11 متوازیت

(1) متوازی خطوط



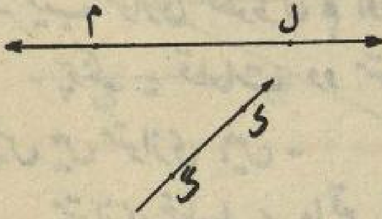
(i) اب↔ اور ج د↔ ایک دوسرے کو نقطہ ر پر قطع کرتے ہیں ۔

یا اب↔ اور ج د↔ میں نقطہ ر مشترک ہے ۔

اب↔ اور ج د↔ متقاطع خطوط ہیں ۔

اگر ا ب اور ج د نقطہ د پر قطع کرتے ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں کہ،

ا ب ∩ ج د = { د }



(ii) ل م اور ک گ گو بظاہر قطع کرتے ہوئے نظر نہیں آتے لیکن چونکہ خط دونوں طرف غیر متناہی ہوتا ہے اس لیے دراصل ل م اور ک گ بھی متقاطع خطوط ہیں۔

(iii) سامنے کی شکل میں دو خطوط ا ج اور ب د دکھائے گئے ہیں۔ ان کے نقش کو خواہ دونوں طرف کتنا ہی کیوں نہ بڑھائیں، یہ کہیں بھی ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ ا ج اور ب د متوازی خطوط ہیں۔

پس " اگر ایک ہی مستوی میں واقع خطوط ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو انہیں متوازی خطوط کہتے ہیں "۔

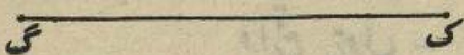
ا ب ، ج د ، ر س متوازی خطوط ہیں۔ متوازی خطوط ا ب اور ج د کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں کہ

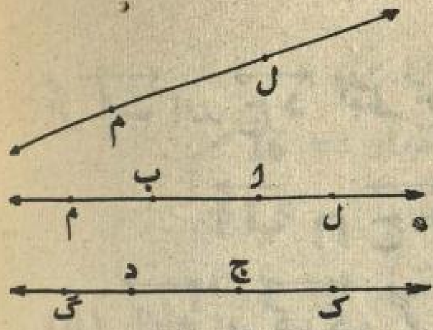
ا ب ∩ ج د = { }

(2) متوازی قطعات :

ہر قطعہ خط کسی نہ کسی خط پر واقع ہوتا ہے جیسا کہ اس کے نام سے بھی ظاہر ہے ۔ گو یہ ضروری نہیں ہے کہ جس خط پر کوئی قطعہ خط واقع ہو، اُس خط کو شکل میں ظاہر بھی کیا جائے۔ مثلاً

ک گ ایک قطعہ خط ہے۔
یہ جس خط پر واقع ہے اسے ظاہر نہیں کیا گیا۔





ل م ایک قطعہ خط ہے اور یہ جس خط پر واقع ہے اُسے ظاہر بھی کر دیا گیا ہے۔

اب آپ ا ب اور ج د کو دیکھیں یہ دونوں بالترتیب متوازی خطوط ل م اور ک گ پر واقع ہیں۔

چونکہ یہ قطعات دو متوازی خطوط پر واقع ہیں، اس لیے یہ قطعاتِ خط بھی آپس میں متوازی ہیں۔

متوازی خطوط پر واقع قطعاتِ خط آپس میں متوازی ہوں گے۔

(3) متوازی شعاعیں :

ہر شعاع کسی نہ کسی خط پر واقع ہوتی ہے۔ اس لیے قطعاتِ خط کی طرح متوازی خطوط پر واقع شعاعیں بھی متوازی ہوں گی۔

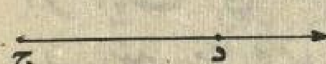


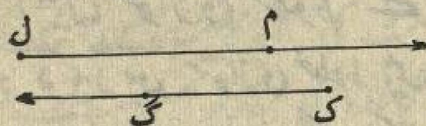


مثلاً س ش اور ت ث متوازی شعاعیں ہیں۔

(4) شعاعوں کے متوازی ہونے کی دو صورتیں ہو سکتی ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



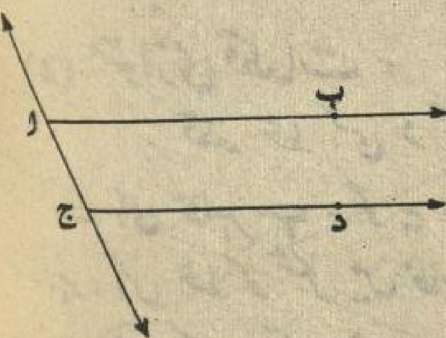




صورت اوّل : ہم سمت شعاعیں

ا ب اور ج د متوازی ہیں اور دونوں کی سمتیں بھی وہی ہیں۔ علاوہ ازیں ا ب کے سرا ا اور ج د کے سرا ج سے گزرتا ہوا خط ا ج کھینچا جائے تو یہ دونوں شعاعیں ا ج کے ایک ہی طرف واقع ہوتی ہیں۔

ا ب اور ج د ہم سمت شعاعیں ہیں۔

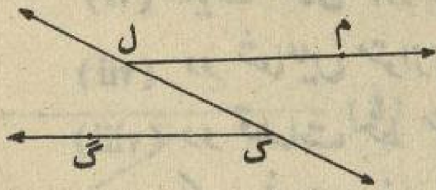


ہم سمت شعاعیں ایسی شعاعیں ہوتی ہیں :

(i) جو متوازی ہوں۔

(ii) اور، اپنے سروں میں سے گزرنے والے خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

صورت دوم : مخالف سمت شعاعیں



ل م اور ک گ متوازی شعاعیں ہیں لیکن ان کی سمتیں مخالف ہیں۔ اس کے علاوہ یہ شعاعیں ل م کے سرا ل اور ک گ کے سرا ک ہیں سے گزرنے والے خط ل ک کی متضاد اطراف میں واقع ہیں۔

مخالف سمت شعاعیں، دو ایسی شعاعیں ہوتی ہیں :

(i) جو متوازی ہوں۔

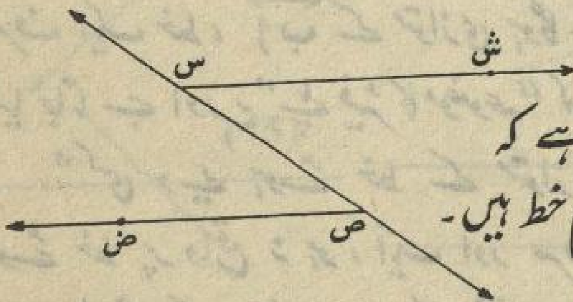
(ii) اور وہ اپنے سروں میں سے گزرنے والے خط کی مخالف طرفوں میں واقع ہوں۔

(5) مخالف شعاعوں اور مخالف سمت شعاعوں میں فرق

(i) ا ب اور ا ج دو مخالف شعاعیں ہیں۔ ان کا سرا ا مشترک ہے اور یہ ہم خط ہیں۔

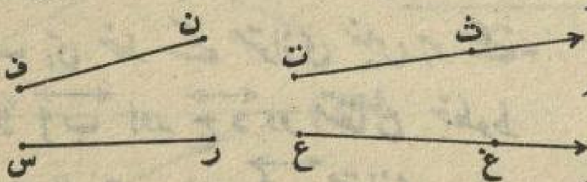


(ii) س ش اور ص ض



دو مخالف سمت شعاعیں ہیں اور ظاہر ہے کہ نہ تو ان کا سرا مشترک ہے اور نہ ہی یہ ہم خط ہیں۔

دو خطوط ہمیشہ متوازی ہوں گے یا متقاطع لیکن دو شعاعوں یا قطعات کے لیے یہ ممکن ہے کہ وہ نہ متوازی ہوں اور نہ ہی متقاطع۔



مثلاً ت ث اور ع غ اور اسی طرح ن د اور ر س نہ متوازی ہیں اور نہ متقاطع۔

اشکال کے متوازی ہونے کی دس صورتیں ہو سکتی ہیں جو ذیل میں درج کی گئی ہیں۔

(i) دو خطوط متوازی ہوں۔

(ii) ایک خط اور ایک شعاع متوازی ہوں۔

(iii) ایک خط اور ایک قطعہ خط متوازی ہوں۔

(iv) ایک خط اور ایک نصف خط متوازی ہوں۔

(v) ایک شعاع اور ایک قطعہ خط متوازی ہوں۔

(vi) ایک شعاع اور ایک نصف خط متوازی ہوں۔

(vii) دو شعاعیں متوازی ہوں۔

(viii) دو قطعاتِ خط متوازی ہوں۔

(ix) ایک نصف خط اور ایک قطعہ خط متوازی ہوں۔

(x) دو نصف خطوط متوازی ہوں۔

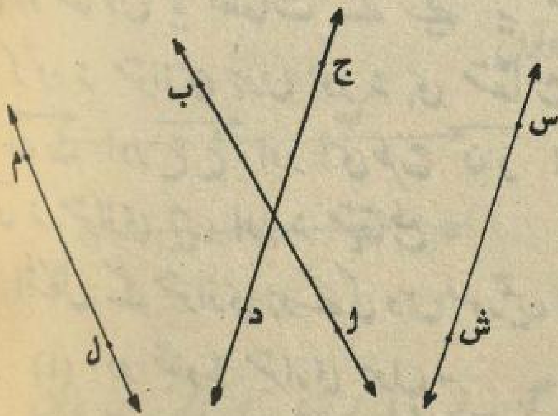
7.12 پلے فیئر کا موضوعہ:



سامنے ایک خط اب اور ایک نقطہ ج کا نقش دیا گیا ہے۔ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی، نقطہ ج سے کتنے خط گزرتے ہیں؟

گو نقطہ ج میں سے غیر متناہی خطوط گزر سکتے ہیں لیکن ان میں سے ایک اور صرف ایک خط، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی ہوگا۔ اس بات کو پلے فیئر نامی ایک شخص سے منسوب کیا جاتا ہے اور یہ "پلے فیئر کا موضوعہ" کہلاتا ہے جو کہ درجِ ذیل ہے۔

"کسی دیے ہوئے خط کے متوازی کسی دیے ہوئے نقطے میں سے، جو کہ دیے ہوئے خط پر واقع نہ ہو، ایک اور صرف ایک خط گزر سکتا ہے۔"

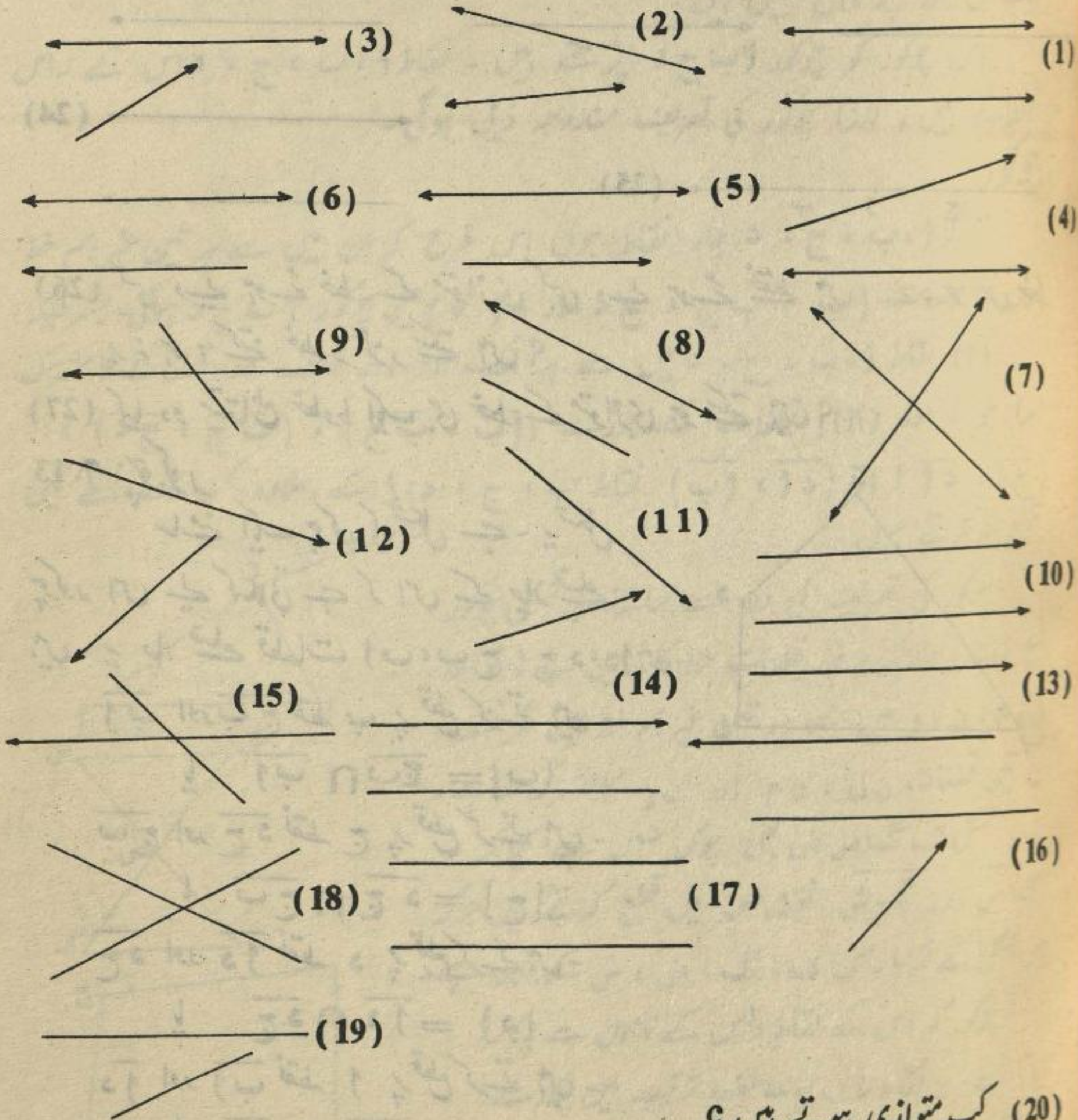


پلے فیئر کے موضوعہ سے ایک نتیجہ یہ بھی نکلتا ہے کہ دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے۔ مثلاً $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ اور $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ دو متقاطع خطوط ہیں۔ ان میں سے $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ متوازی ہے $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ کے لیکن $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ متوازی نہیں ہے $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ کے۔

اسی طرح $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ خط س ش کے متوازی ہے لیکن $\overleftrightarrow{\text{اب}}$، خط س ش کے متوازی نہیں ہے۔

مشق 7.3

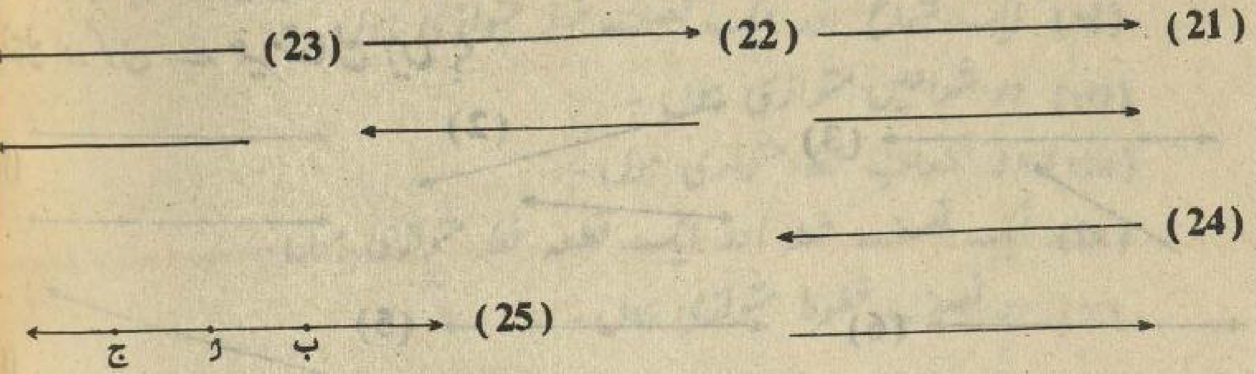
مندرجہ ذیل جوڑوں میں سے کون سے متوازی اور کون سے غیر متوازی ہیں؟ کون سے متقاطع اور کون سے غیر متقاطع ہیں؟



(20) کب متوازی ہوتے ہیں؟

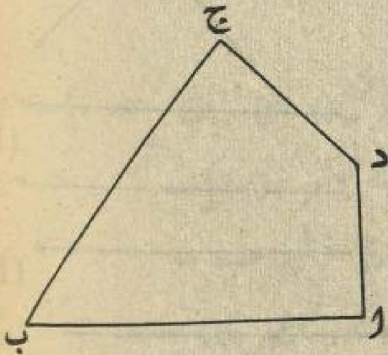
(i) دو خطوط
(ii) ایک خط اور ایک شعاع
(iii) ایک خط اور ایک قطعہ خط
(iv) دو شعاعیں
(v) ایک شعاع اور ایک قطعہ خط
(vi) دو قطعاتِ خط
(vii) دو نصف خط
(viii) ایک شعاع اور ایک نصف خط

مندرجہ ذیل میں سے کون سی ہم سمت، کون سی مخالف سمت اور کون سی مخالف شعاعیں ہیں؟



(26) کسی دیے ہوئے خط کے متوازی کسی دیے ہوئے نقطے میں سے، جو اس خط پر نہ ہو، کتنے خطوط گزر سکتے ہیں؟
(27) کیا دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی ہو سکتے ہیں؟

7.13 چوکور



سامنے ایک چوکور کی شکل ہے۔ یہ شکل چوکور اس لیے کہلاتی ہے کہ اس کے چار ضلعے ہیں۔ یہ چار ضلعے قطعات اب، ب ج، ج د، د ا ہیں۔

$\overline{ا ب}$ اور $\overline{ب ج}$ نقطہ ب پر قطع کرتے ہیں۔

یا $\overline{ا ب} \cap \overline{ب ج} = \{ب\}$

$\overline{ب ج}$ اور $\overline{ج د}$ نقطہ ج پر قطع کرتے ہیں۔

یا $\overline{ب ج} \cap \overline{ج د} = \{ج\}$

$\overline{ج د}$ اور $\overline{د ا}$ نقطہ د پر قطع کرتے ہیں۔

یا $\overline{ج د} \cap \overline{د ا} = \{د\}$

$\overline{د ا}$ اور $\overline{ا ب}$ نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں۔

یا $\overline{د ا} \cap \overline{ا ب} = \{ا\}$

$\overline{ا ب}$ اور $\overline{ب ج}$ میں نقطہ ب کے سوا کوئی اور نقطہ مشترک نہیں ہے۔ اسی طرح اوپر دیے ہوئے قطعات کے ہر جوڑے میں صرف ایک نقطہ مشترک ہے۔

یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ نقاط ب ، ج ، د ، ا میں سے ہر ایک دو اور صرف دو قطعات کا مشترک سرا ہے۔

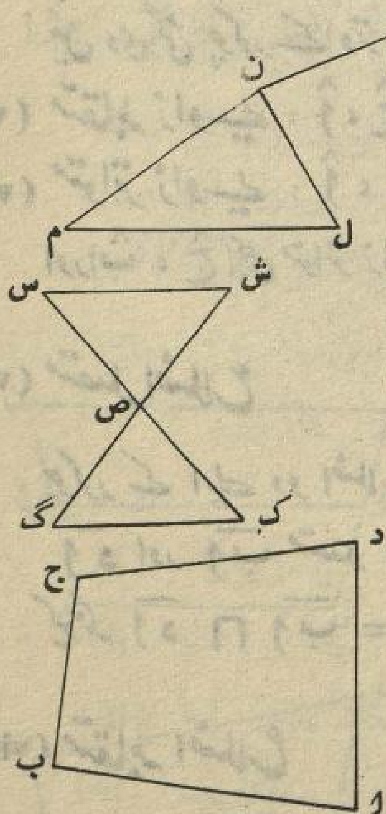
ا ، ب ، ج ، د میں سے ہر تین نقاط غیر ہم خط ہیں۔ یعنی کوئی بھی تین نقاط ایک ہی خط پر واقع نہیں ہیں۔

اس چوکور کو چوکور ا ب ج د پڑھتے ہیں۔ نقاط ا ، ب ، ج ، د اس کے راس کہلاتے ہیں، لہٰذا چوکور کی تعریف مندرجہ ذیل ہوگی۔

چوکور

" اگر ا ، ب ، ج ، د چار نقاط ہوں اس طرح کہ ان میں سے ہر تین غیر ہم خط ہوں تو قطعات ا ب ، ب ج ، ج د اور د ا کا یونین چوکور ا ب ج د ہوگی۔ بشرطیکہ

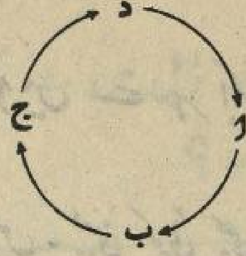
(i) نقاط ا ، ب ، ج ، د میں سے ہر ایک دو اور صرف دو قطعات کا مشترک سرا ہو ، اور (ii) قطعات کے جوڑے ($\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بج}}$) ، ($\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{جد}}$) ، ($\overline{\text{جد}}$ ، $\overline{\text{دا}}$) اور ($\overline{\text{دا}}$ ، $\overline{\text{اب}}$) نقاط ب ، ج ، د ، ا کے علاوہ کسی اور نقطے میں قطع نہ کرتے ہوں۔

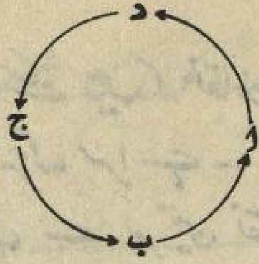


چوکور کی تعریف کی رو سے سامنے کی شکل چوکور نہیں ہے۔ حالانکہ یہ چار قطعات خط کا یونین ہے ، نقاط ل ، م ، ن ، و میں سے ہر تین غیر ہم خط ہیں مگر نقطہ ن تین قطعات ن ل ، ن م اور ن و کا مشترک سرا ہے۔

شکل ک گ س ش بھی چوکور نہیں ہے کیونکہ $\overline{\text{کس}}$ اور $\overline{\text{گش}}$ نقطہ ص میں قطع کرتے ہیں جو کہ اس شکل کے نقاطِ راس ک ، گ ، س ، ش کے علاوہ ہے۔

چوکور کو اس کے نقاطِ راس کے ناموں سے پکارا جاتا ہے۔ یہ نقاط راس ایک مقررہ ترتیب میں پکارے جاتے ہیں۔ مثلاً چوکور ا ب ج د کو چوکور ب ج د ا یا چوکور ا د ج ب کے نام سے بھی پکار سکتے ہیں۔ مگر چوکور ا ب ج د کو ا ج ب د نہیں پکار سکتے۔ پس نقاط راس کی ترتیب یوں ہوئی۔



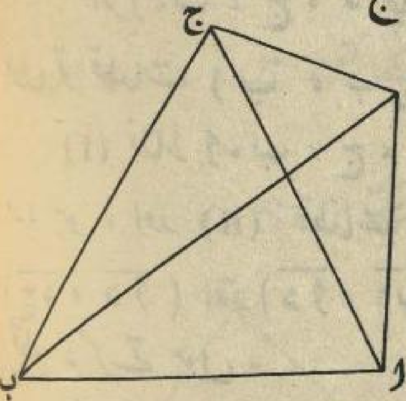


لہٰذا ہم پڑھ سکتے ہیں :

چوکور ا ب ج د
چوکور ب ج د ا
چوکور ج د ا ب
چوکور د ا ب ج

یا

چوکور ا د ج ب
چوکور د ج ب ا
چوکور ج ب ا د
چوکور ب ا د ج



(i) $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{جد}}$ ، $\overline{\text{دا}}$ چوکور کے اضلاع ہیں ۔

(ii) $\hat{\text{ا}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ج}}$ ، $\hat{\text{د}}$ چوکور کے زاویے ہیں ۔

(iii) ا ، ب ، ج ، د چوکور کے راس ہیں ۔

(iv) چوکور کے دو وتر ہوتے ہیں ۔ سامنے کی شکل میں دی گئی چوکور کے وتر $\overline{\text{اج}}$ اور $\overline{\text{بد}}$ ہیں ۔

(v) متقابلہ زاویے : $\hat{\text{ا}}$ ، $\hat{\text{ج}}$ اور اسی طرح $\hat{\text{د}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ چوکور کے متقابلہ زاویے ہیں ۔

(vi) متواتر زاویے : $\hat{\text{ا}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ چوکور کے متواتر زاویے ہیں ۔ اسی طرح ($\hat{\text{ج}}$ ، $\hat{\text{د}}$)، ($\hat{\text{د}}$ ، $\hat{\text{ا}}$) اور ($\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ج}}$) بھی متواتر زاویے ہیں ۔

(vii) متصلہ اضلاع

چوکور کے ایسے دو اضلاع جن کا ایک سرا مشترک ہو متصلہ اضلاع کہلاتے ہیں ۔ $\overline{\text{اد}}$ اور $\overline{\text{اب}}$ متصلہ اضلاع ہیں ۔ اسی طرح $\overline{\text{اب}}$ اور $\overline{\text{بج}}$ بھی متصلہ اضلاع ہیں ۔ کیونکہ $\overline{\text{اد}} \cap \overline{\text{اب}} = \{\text{ا}\}$ اور $\overline{\text{اب}} \cap \overline{\text{بج}} = \{\text{ب}\}$

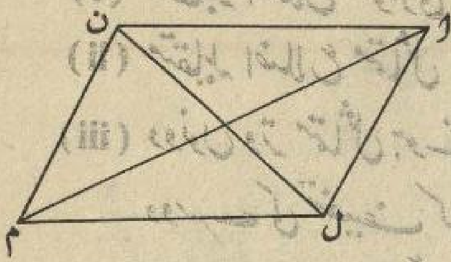
(viii) متقابلہ اضلاع

چوکور کے دو غیر متصلہ اضلاع ، متقابلہ اضلاع کہلاتے ہیں ۔ $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{جد}}$ اور اسی طرح $\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{دا}}$ متقابلہ اضلاع ہیں ۔ کیونکہ $\overline{\text{اب}} \cap \overline{\text{جد}} = \emptyset$ ، $\overline{\text{بج}} \cap \overline{\text{دا}} = \emptyset$

7.14 چوکور کی قسمیں

اضلاع کے متوازی یا غیر متوازی ہونے کے لحاظ سے درجہ بندی۔

(1) متوازی الاضلاع : ایسی چوکور متوازی الاضلاع کہلاتی ہے جس میں متقابلہ اضلاع کے دونوں جوڑے باہم متوازی ہوں۔



متوازی الاضلاع کے :

(i) متقابلہ اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

(ii) متقابلہ اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(iv) دو وتر ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

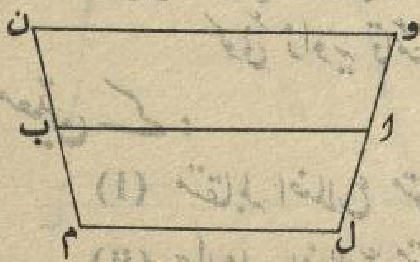
(v) دو متواتر زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

(2) ذوزنقہ : ایسی چوکور ذوزنقہ کہلاتی ہے جس کے متقابلہ اضلاع کا ایک جوڑا باہم متوازی ہو اور دوسرا غیر متوازی۔

ذوزنقہ کے :

(i) متقابلہ اضلاع کا ایک جوڑا متوازی ہوتا ہے اور دوسرا غیر متوازی۔

(ii) غیر متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔ $\overline{ل و}$ کا وسطی نقطہ ا اور $\overline{م ن}$ کا وسطی نقطہ ب ہے اور $\overline{ا ب}$ متوازی ہے $\overline{و ن}$ اور $\overline{ل م}$ کے۔



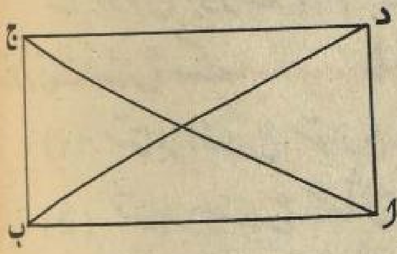
(طلبہ کو چاہیے کہ اپنے استاد صاحب کی مدد سے مختلف ذوزنقہ بنا کر اس بات کی خود پڑتال کریں۔)

(3) ایسی چوکور جس کے متقابلہ اضلاع کا کوئی بھی جوڑا باہم متوازی نہ ہو عام چوکور یا مختلف الاضلاع چوکور کہلاتی ہے۔



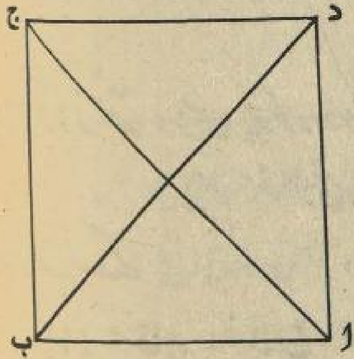
متوازی الاضلاع کی اقسام

(1) مستطیل : ایسی متوازی الاضلاع مستطیل کہلاتی ہے جس کے چاروں زاویے قائمے ہوں۔
مستطیل کے :



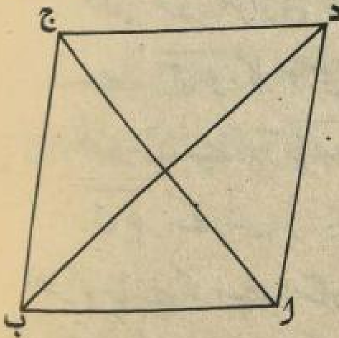
(i) متقابلہ اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔
(ii) متقابلہ اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
(iii) دونوں وتر متماثل ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
(iv) چاروں زاویے قائمے ہوتے ہیں۔

(2) مربّع : ایسی مستطیل مربّع کہلاتی ہے جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں۔
مربّع کے :



(i) متقابلہ اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔
(ii) چاروں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
(iii) چاروں زاویے قائمے ہوتے ہیں۔
(iv) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

(3) معیّن : ایسی متوازی الاضلاع معیّن کہلاتی ہے جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں لیکن کوئی زاویہ قائمہ نہ ہو۔



معیّن کے :

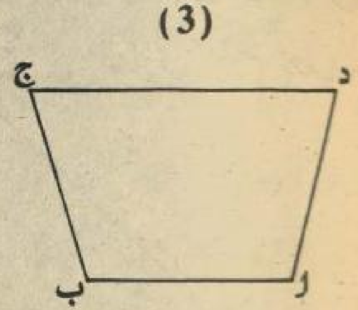
(i) متقابلہ اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔
(ii) چاروں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
(iii) کوئی زاویہ قائمہ نہیں ہوتا۔
(iv) وتر ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں۔

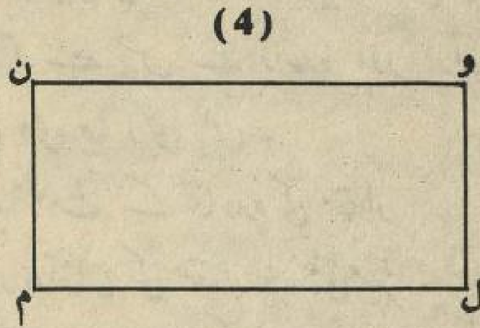
مشق 7.4

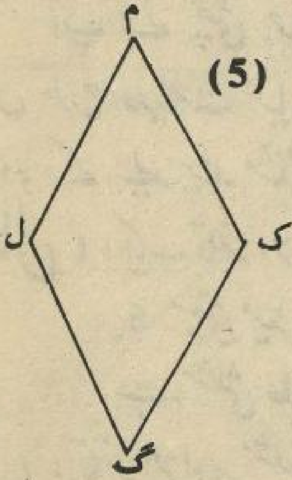
(1) کسی چوکور کے متصلہ اور متقابلہ اضلاع سے کیا مراد ہے؟

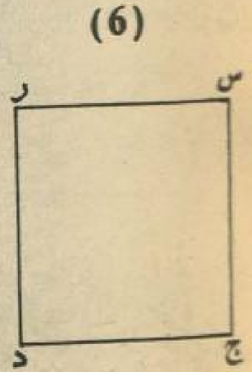
(2) کسی چوکور کی شکل بنا کر اس کے وتروں کو ظاہر کیجیے۔ چوکور کے کتنے وتر ہوتے ہیں؟

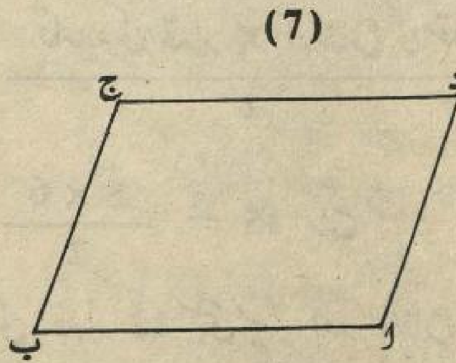
مندرجہ ذیل اشکال میں سے ہر ایک کا نام مع قسم کے لکھیے۔
نیز اُن کے متصلہ اور متقابلہ اضلاع کے نام لکھیے۔

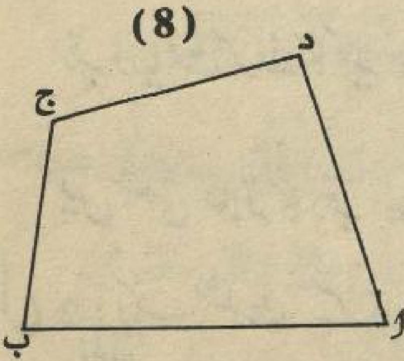












مندرجہ ذیل اشکال میں سے ہر ایک کے خواص بیان کیجیے:

(9) متوازی الاضلاع (10) مستطیل (11) مربع

(12) ذوزنقہ (13) معیّن

(14) سوال 3 تا 8 میں دی گئی اشکال کے زاویوں کے نام لکھیے۔

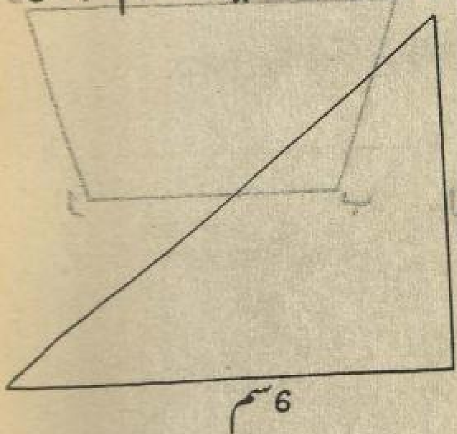
باب 8

حصّہ اوّل : رقبہ

حصّہ دوم : اشکال کی بناوٹ

8.1 مثلثی اور چوکوروی علاقوں کا رقبہ

آپ نے چھٹی جماعت میں پڑھا تھا کہ ایسے مثلثی اور متوازی الاضلاعی علاقہ کا رقبہ کس طرح دریافت کیا جاتا ہے جس کے قاعدہ اور ارتفاع کی مقداریں معلوم ہوں۔ اعادہ کے لیے چند مثالیں دی جا رہی ہیں۔



مثال 1 : ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار 6 سینٹی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 5 سینٹی میٹر ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار = 6 سم

قائمۃ الزاویہ مثلث کے ارتفاع کی مقدار = 5 سم

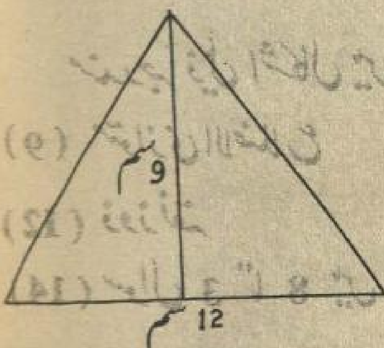
$$\text{رقبہ دریافت کرنے کا کلیہ} = \frac{\text{قاعدہ کی مقدار} \times \text{ارتفاع کی مقدار}}{2}$$

$$\text{پس مثلثی علاقہ کا رقبہ} = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \text{ مربّع سم}$$

مثال 2 : ایک مثلث کے قاعدہ کی مقدار 12 سینٹی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 9 سینٹی میٹر ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : مثلث کے قاعدہ کی مقدار = 12 سم

مثلث کے ارتفاع کی مقدار = 9 سم



$$\text{مثلثی علاقہ کا رقبہ} = \frac{9 \times 12}{2} = 54 \text{ مربّع سم}$$

مثال 3 : ایک متوازی الاضلاع کے قاعدہ کی مقدار 15 ڈیسی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 12 ڈیسی میٹر ہے۔ متوازی الاضلاعی علاقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

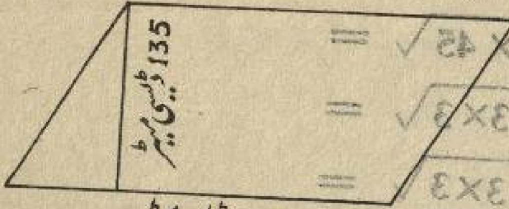


حل : متوازی الاضلاعی علاقہ کا قاعدہ = 15 ڈیسی میٹر

متوازی الاضلاع کے ارتفاع کی مقدار = 12 ڈیسی میٹر

رقبہ = $15 \times 12 = 180$ مربع ڈیسی میٹر

مثال 4 : ایک متوازی الاضلاع شکل کے کھیت کے قاعدہ کی مقدار 250 ڈیسی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 135 ڈیسی میٹر ہے۔ کھیت کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل : کھیت کے قاعدہ کی مقدار = 250 ڈیسی میٹر

کھیت کے ارتفاع کی مقدار = 135 ڈیسی میٹر

رقبہ = $250 \times 135 = 33750$ مربع ڈیسی میٹر

8.2 اب ہم ایسے مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے جس کے تینوں اضلاع کی مقداریں دی ہوئی ہوں۔ فرض کریں کہ ا ب ج ایک مثلث ہے۔ اگر زاویہ ا کے متقابلہ ضلع ب ج کی مقدار اَ، زاویہ ب کے متقابلہ ضلع ا ج کی مقدار بَ، اور زاویہ ج کے متقابلہ ضلع ا ب کی مقدار جَ ہو تو

مثلثی علاقہ کا رقبہ = $\sqrt{\text{س}\,(\text{س} - \text{اَ})\,(\text{س} - \text{بَ})\,(\text{س} - \text{جَ})}$

جبکہ $\text{س} = \dfrac{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}}{2}$ = اضلاع کی مقداروں کے مجموعے کا نصف

مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنے کے اس طریقہ کو ہیرو (Hero) کا کلیہ کہتے ہیں۔

مثال 5 : ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی مقداریں 13 سم، 37 سم اور 40 سم ہیں۔ اس مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

حل : اَ = 13 سم ، بَ = 37 سم

جَ = 40 سم

اضلاع کی مقداروں کے مجموعہ کا نصف = س = $\frac{40 + 37 + 13}{2}$

$= \frac{90}{2} = 45$

س − اَ = $45 - 13 = 32$

س − بَ = $45 - 37 = 8$

س − جَ = $45 - 40 = 5$

لہٰذا مثلثی علاقہ کا رقبہ = $\sqrt{\text{س}(\text{س}-\text{اَ})(\text{س}-\text{بَ})(\text{س}-\text{جَ})}$

$= \sqrt{5 \times 8 \times 32 \times 45}$

$= \sqrt{5\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times3\times3}$

$= \sqrt{\underline{5\times5}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}}$

$= 5\times2\times2\times2\times2\times3$

= 240 مربع سم

مشق 8.1

(1) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدہ کی مقدار 15 ڈیسی میٹر اور عمود کی مقدار 12 سینٹی میٹر ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث شکل کے ایک پلاٹ کے قاعدہ کی مقدار 75 میٹر اور عمود کی مقدار 32 میٹر ہے۔ پلاٹ کا رقبہ معلوم کریں۔

(3) زمین کا ایک پلاٹ مثلثی شکل کا ہے اس کے قاعدہ کی مقدار 82 میٹر اور عمود کی مقدار 95 ڈیسی میٹر ہے۔ پلاٹ کا رقبہ معلوم کریں۔

(4) ایک متوازی الاضلاع کے قاعدہ کی مقدار 26 سینٹی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 15 سینٹی میٹر ہے۔ رقبہ معلوم کریں۔

(5) متوازی الاضلاعی شکل کے ایک باغ کے قاعدہ کی مقدار 3.85 ہیکٹومیٹر اور ارتفاع کی مقدار 2.68 ہیکٹومیٹر ہے۔ باغ کا رقبہ معلوم کریں۔

(6) ایک متوازی الاضلاع کے قاعدہ کی مقدار 4.6 سینٹی میٹر اور ارتفاع کی مقدار 3.8 سینٹی میٹر ہے۔ رقبہ معلوم کریں۔

مثلثی علاقوں کے رقبے معلوم کریں جن کے اضلاع کی مقداریں مندرجہ ذیل ہیں :

(7) 10 سینٹی میٹر ، 17 سینٹی میٹر ، 21 سینٹی میٹر

(8) 75 ڈیسی میٹر ، 65 ڈیسی میٹر ، 20 ڈیسی میٹر

(9) 75 ڈیکا میٹر ، 73 ڈیکا میٹر ، 52 ڈیکا میٹر

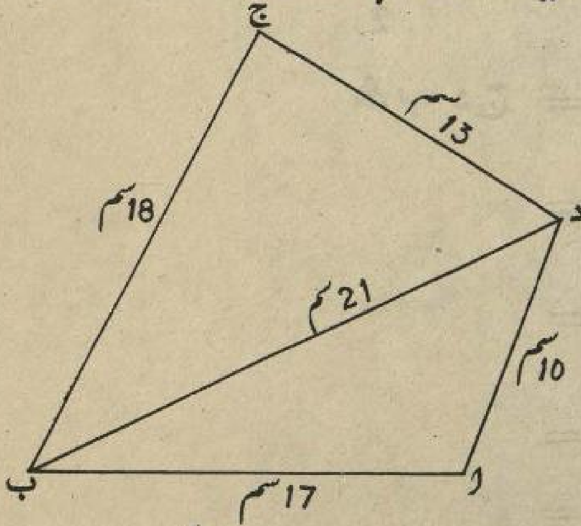
(10) 102 سینٹی میٹر ، 109 سینٹی میٹر ، 61 سینٹی میٹر

(11) 350 ڈیسی میٹر ، 45 ڈیسی میٹر ، 325 ڈیسی میٹر

(12) 6 ہیکٹو میٹر ، 5 ہیکٹو میٹر ، 4 ہیکٹو میٹر

8.3 چوکوروی علاقوں کا رقبہ :

ہیرو کے کلیہ کی مدد سے ہم کسی بھی دیے ہوئے چوکوروی علاقے کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں ۔



مثال 1 : ایک چوکور ا ب ج د کے اضلاع کی لمبائیاں 17 سینٹی میٹر ، 18 سینٹی میٹر ، 13 سینٹی میٹر اور 10 سینٹی میٹر ہیں ، اور اس کے ایک وتر کی لمبائی 21 سینٹی میٹر ہے ۔ چوکوروی علاقے کا رقبہ معلوم کریں ۔

حل : چوکوروی علاقہ ا ب ج د دراصل دو مثلثی علاقوں ا ب د اور ب ج د پر مشتمل ہے ۔ اس لیے چوکوروی علاقہ ا ب ج د کا رقبہ ان دونوں مثلثی علاقوں کے رقبوں کے مجموعے کے برابر ہوگا۔

$\triangle$ ا ب د میں م $\overline{\text{ا ب}}$ = 17 سم ، م $\overline{\text{ب د}}$ = 21 سم ، م $\overline{\text{ا د}}$ = 10 سم

س = $\dfrac{\text{م}\overline{\text{ا ب}} + \text{م}\overline{\text{ب د}} + \text{م}\overline{\text{ا د}}}{2} = \dfrac{10 + 21 + 17}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$ سم

س − م $\overline{\text{ا ب}}$ = $24 - 17 = 7$

"▲ ا ب د " سے مراد " مثلثی علاقہ ا ب د " ہے ، جبکہ " $\triangle$ ا ب د " سے مراد " مثلث ا ب د " ہے ۔

س − م ب د = $24 - 21 = 3$

س − م ا د = $24 - 10 = 14$

▲ ا ب د = $\sqrt{24 \times 7 \times 3 \times 14}$

= $\sqrt{7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}$

= $\sqrt{7 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$

= $7 \times 2 \times 2 \times 3 = 84$ مربع سم

اسی طرح △ ب د ج میں ؛ م ب د = 21 سم ، م د ج = 13 سم ، م ب ج = 18 سم

س = $\frac{18 + 13 + 21}{2} = \frac{52}{2} = 26$

▲ ب د ج = $\sqrt{8 \times 13 \times 5 \times 26}$

= $\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 5 \times 13 \times 2}$

= $\sqrt{5 \times 13 \times 13 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

= $\sqrt{5} \times 13 \times 2 \times 2 = \sqrt{5} \times 52$

= 2.236×52 کیونکہ $\sqrt{5} = 2.236$

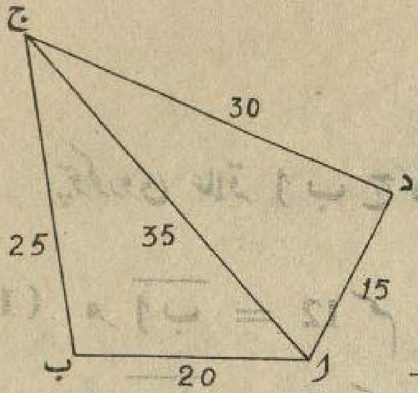
= 116.27 مربع سم

لہٰذا چوکوروی علاقہ ا ب ج د کا رقبہ = ▲ ا ب د + ▲ ب د ج

= 84 مربع سم + 116.27 مربع سم

= 200.27 مربع سم

مثال 2: ایک چوکور ا ب ج د کے اضلاع کی لمبائیاں 15 ، 20 ، 25 اور 30 ڈیسی میٹر ہیں جبکہ ایک وتر کی مقدار 35 ڈیسی میٹر ہے۔ رقبہ معلوم کریں۔



حل : △ اب ج میں

س $= \frac{35 + 25 + 20}{2} = \frac{80}{2} = 40$

▲ اب ج $= \sqrt{5 \times 15 \times 20 \times 40}$

$= \sqrt{5 \times 3 \times 5 \times 4 \times 5 \times 2 \times 4 \times 5}$

$= \sqrt{3 \times 2 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= \sqrt{6} \times 4 \times 5 \times 5$

$= 2.449 \times 100$ چونکہ $\sqrt{6} = 2.449$

$= 244.9$ مربع ڈیسی میٹر

△ اج د میں

س $= \frac{30 + 35 + 15}{2} = \frac{80}{2} = 40$

▲ اج د $= \sqrt{10 \times 5 \times 25 \times 40}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= \sqrt{5} \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= \sqrt{5} \times 100 = 2.236 \times 100$

$= 223.6$ مربع ڈیسی میٹر

چوکوروی علاقہ ا ب ج د کا رقبہ $= 244.9$ مربع ڈیسی میٹر $+ 223.6$ مربع ڈیسی میٹر

$= 468.5$ مربع ڈیسی میٹر

مشق 8.2

چوکوروی علاقہ ا ب ج د کا رقبہ معلوم کریں جبکہ :

(1) م اب = 12 سم ، م ب ج = 14 سم ، م ب د = 21 سم
م ج د = 17 سم ، م د ا = 19 سم

(2) م اب = 12 ڈم ، م ب ج = 17 ڈم م ج د = 22 ڈم
م د ا = 25 ڈم، م ب د = 31 ڈم

(3) م اب = 1.2 میٹر ، م ب ج = 1.7 میٹر ، م ج د = 2.2 میٹر
م د ا = 2.5 میٹر ، م ب د = 3.1 میٹر

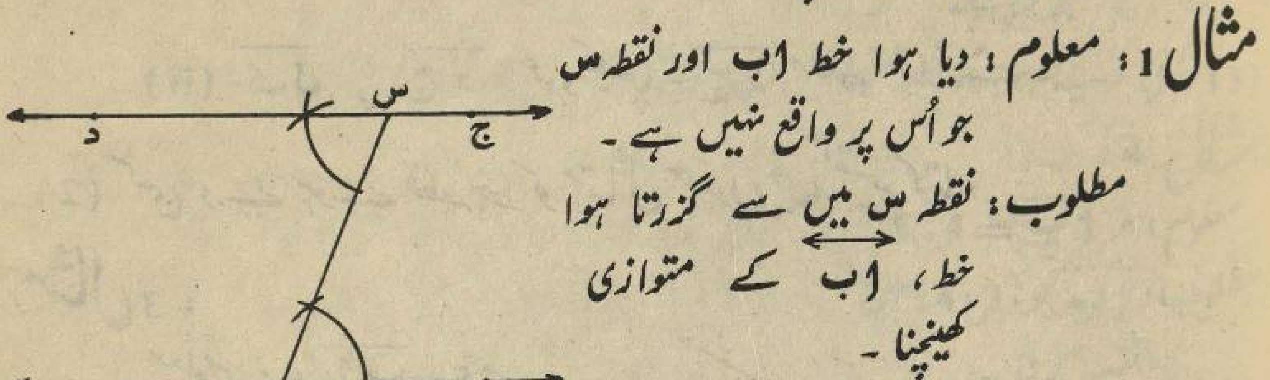
(4) م اب = 1.2 میٹر ، م ب ج = 1.4 میٹر ، م ج د = 1.7 میٹر
م ب د = 2.1 میٹر ، م د ا = 1.9 میٹر

(5) م اب = 2.3 میٹر ، م ب ج = 2.6 میٹر ، م ب د = 4.2 میٹر
م ج د = 3.2 میٹر ، م د ا = 2.7 میٹر

حصّہ دوم : اشکال کی بناوٹ

8.4 (1) کسی دیے ہوئے خط کے متوازی کسی دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتا ہوا خط کھینچنا :

مثال 1 : معلوم : دیا ہوا خط اب اور نقطہ س جو اُس پر واقع نہیں ہے ۔



مطلوب : نقطہ س میں سے گزرتا ہوا خط، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی کھینچنا ۔

عمل (i) خط اب پر کوئی سا نقطہ ر لیا۔

(ii) ایک قطعہ خط رس کھینچا ۔

(iii) نقطہ س کو راس مان کر ا$\hat{\text{ر}}$س کے متماثل زاویہ رس د بنایا۔

(iv) $\overleftarrow{\text{د س}}$ پر ایک نقطہ ج لیا۔

(v) $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ مطلوبہ خط ہے جو $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی ہے اور نقطہ س میں سے گزرتا ہے ۔

نوٹ : اساتذہ کو چاہیے کہ دیے ہوئے خط کے متوازی خط سیٹ سکوائر کی مدد سے کھینچنے کا طریقہ بھی سکھائیں۔

مثال 2 :

معلوم : $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ اور نقطہ ل جو $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ سے 3 سم دور ہے ۔

مطلوب : نقطہ ل میں سے گزرتا ہُوا خط ، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی کھینچنا ۔

عمل : (i) $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کا نقش بنایا۔

(ii) $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ پر کوئی سا نقطہ ک لیا۔

(iii) نقطہ ک سے $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ پر عمود کھینچا۔

اور م $\overline{\text{ک ل}}$ = 3 سم قطع کیا۔

(iv) $\overline{\text{ک ل}}$ پر $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ عمود کھینچا۔ $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ مطلوبہ خط ہے۔

(2) کسی دیے ہوئے قطعہ خط کو متماثل حصّوں میں تقسیم کرنا:

مثال 3 :

معلوم : م $\overline{\text{اب}}$ = 5 سم

مطلوب : $\overline{\text{اب}}$ کو 5 متماثل حصّوں میں تقسیم کرنا ہے۔

عمل :

(i) $\overline{\text{اب}}$ 5 سم لمبا کھینچا۔

(ii) نقطہ ب کو راس مان کر کوئی سا حادہ زاویہ ا ب ل بنایا۔

(iii) مناسب رداس کی پرکار کھول کر نقطہ ب کو مرکز مان کر ایک قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{\text{ب ل}}$ کو نقطہ ج پر قطع کیا۔

(iv) اب نقطہ ج کو مرکز مان کر اُسی رداس کی ایک اور قوس لگائی جس نے $\overrightarrow{\text{ب ل}}$ کو نقطہ د پر قطع کیا۔

(v) مندرجہ بالا عمل کو دُہراتے ہوئے $\overrightarrow{\text{ب ل}}$ کو نقاط د، س اور ک پر قطع کرتی ہوئی قوسیں لگائیں۔

(دیکھیے شکل)

(vi) قطعہ خط ک ا کھینچا۔

(vii) اب نقاط س ، د ، ذ اور ج میں سے گزرتے ہوئے قطعات خط، ک ا کے متوازی کھینچے جو ا ب کو نقاط سَ، ذَ ، دَ اور جَ پر قطع کرتے ہیں۔

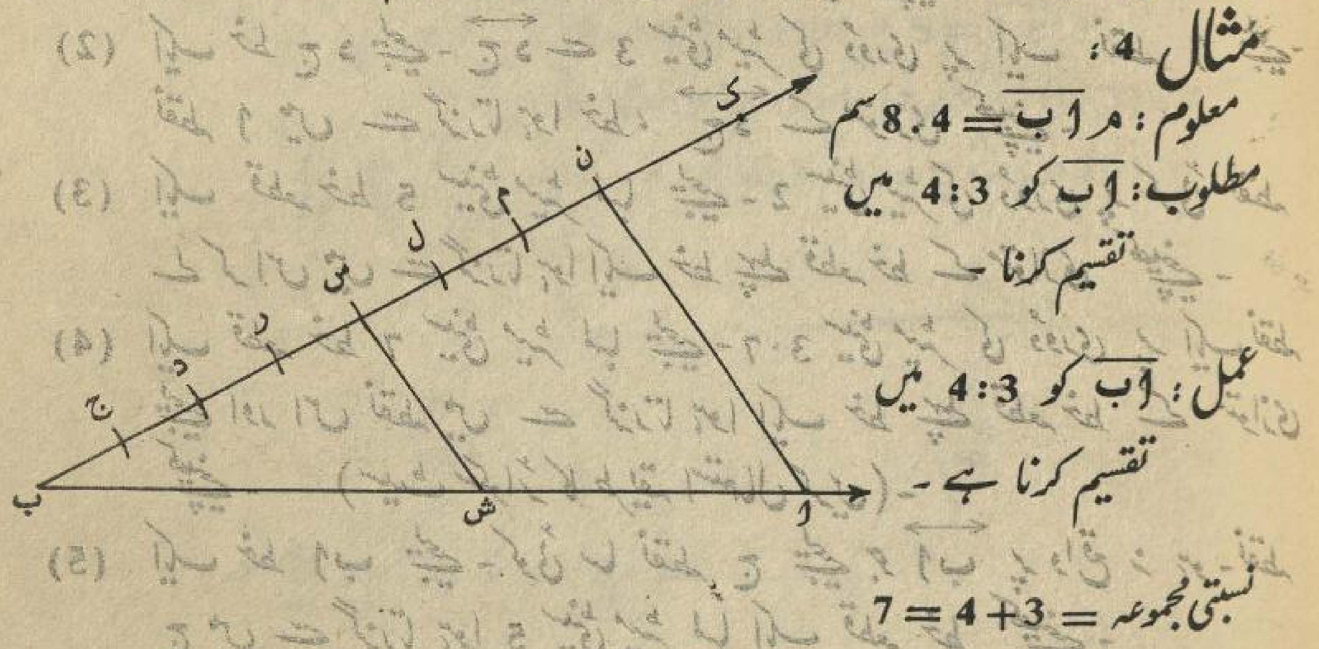
(viii) پس ا ب 5 متماثل حصوں ا سَ، سَ ذَ، ذَ دَ، دَ جَ اور جَ بَ میں تقسیم ہو گیا ہے۔

(3) کسی دیے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا :

مثال 4 :

معلوم : م ا ب = 8.4 سم

مطلوب: ا ب کو 4:3 میں تقسیم کرنا ہے۔



عمل : ا ب کو 4:3 میں تقسیم کرنا ہے۔

نسبتی مجموعہ = 3 + 4 = 7

(i) ا ب 8.4 سم لمبا کھینچا۔

(ii) ایک حادہ زاویہ ا ب ک بنایا۔

(iii) کسی مناسب رداس کی پرکار کھول کر نقطہ ب کو مرکز مان کر ایک قوس لگائی جس نے ب ک کو نقطہ ج پر قطع کیا۔

(iv) نقطہ ج کو مرکز مان کر اُسی رداس کی قوس لگائی جس نے ب ک کو نقطہ د پر قطع کیا۔

(v) مندرجہ بالا عمل کو دُہراتے ہوئے اُسی رداس کی قوسیں لگائیں جو ب ک کو نقاط د ، س ، ل ، م اور ن پر قطع کرتی ہیں۔

(vi) ن ا کھینچا۔

(vii) نقطہ ن سے آگے ب کی طرف 3 نقاط گنیں تو نقطہ س آ جائے گا۔
س ش کو $\overline{\text{ن ا}}$ کے متوازی کھینچا۔

(viii) $\overline{\text{اب}}$ کی مطلوبہ تقسیم یوں ہوئی: م $\overline{\text{اش}}$: م $\overline{\text{ش ب}}$ = 4:3

مشق 8.3

(1) کوئی خط اب اور ایک نقطہ ج لیجیے جو $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ پر واقع نہ ہو۔ نقطہ ج میں سے گزرتا ہوا خط، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ کے متوازی کھینچیے۔

(2) ایک خط ج د لیجیے۔ $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ سے 3 سینٹی میٹر کی دُوری پر ایک نقطہ ا لیجیے۔ نقطہ ا میں سے گزرتا ہوا خط، $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ کے متوازی کھینچیے۔

(3) ایک قطعہ خط 5 سینٹی میٹر لمبا لیجیے۔ 2 سینٹی میٹر کی دُوری پر کوئی نقطہ لے کر اس میں سے گزرتا ہوا ایک خط پہلے قطعہ خط کے متوازی کھینچیے۔

(4) ایک قطعہ خط 7 سینٹی میٹر لمبا لیجیے۔ 3.7 سینٹی میٹر کی دُوری پر ایک نقطہ لیجیے اور اس نقطہ میں سے گزرتا ہوا ایک خط پہلے قطعہ خط کے متوازی کھینچیے۔ (سیٹ سکوائر کا طریقہ استعمال کریں)۔

(5) ایک خط اب لیجیے۔ کوئی سا نقطہ ج لیجیے جو $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ پر واقع نہ ہو۔ نقطہ ج میں سے گزرتا ہوا 5 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعہ خط کھینچیے۔
(سیٹ سکوائر کا طریقہ استعمال کریں)۔

نوٹ: ذیل میں دی ہوئی لمبائیوں کے قطعات کھینچ کر دی ہوئی نسبتوں میں تقسیم کیجیے۔

(6) 7 سم، نسبت = 3:2
(7) 6 سم، نسبت = 2:1
(8) 8.5 سم، نسبت = 4:3
(9) 6.7 سم، نسبت = 3:2
(10) 7.6 سم، نسبت = 4:1
(11) 5.8 سم، نسبت = 2:1
(12) 9 سم، نسبت = 5:4

8.5 چوکور کی بناوٹ :

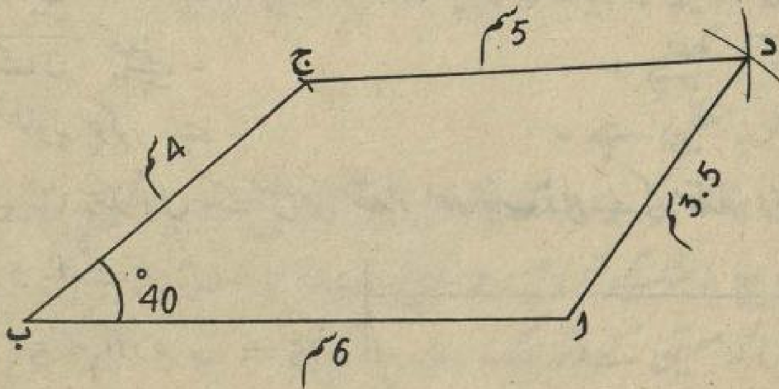
پچھلی جماعتوں میں آپ مثلث ، مربع ، مستطیل اور متوازی الاضلاع بنانے کے طریقے سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم عام چوکور اور معیّن بنانے کے طریقے سیکھیں گے۔

(چوکور بنانا جبکہ اس کے چاروں اضلاع کی مقداریں اور ایک زاویہ کی مقدار معلوم ہو۔)

مثال 1 : چوکور ا ب ج د بنایئے جس میں م $\overline{\text{ا ب}}$ = 6 سم ، م $\overline{\text{ب ج}}$ = 4 سم ، م $\overline{\text{ج د}}$ = 5 سم اور م $\overline{\text{د ا}}$ = 3.5 سم ، م ا $\hat{\text{ب}}$ ج = 40°

عمل : (i) ایک قطعہ خط $\overline{\text{ا ب}}$ 6 سم لمبا کھینچا۔

(ii) م ا $\hat{\text{ب}}$ ج = 40° کا بنایا اور م $\overline{\text{ب ج}}$ = 4 سم قطع کیا۔



(iii) ج کو مرکز مان کر 5 سم رداس کی ایک قوس لگائی۔

(iv) ا کو مرکز مان کر 3.5 سم رداس کی ایک قوس لگائی جس نے پہلی قوس کو نقطہ د پر قطع کیا۔

(v) $\overline{\text{ج د}}$ اور $\overline{\text{د ا}}$ کھینچیے۔ ا ب ج د مطلوبہ چوکور ہے۔

مثال 2 : (چوکور بنانا جبکہ اس کے اضلاع اور ایک وتر کی مقداریں معلوم ہوں۔)

ل م ن ک ایک چوکور بنایئے جس میں

م $\overline{\text{ل م}}$ = 6 سم ، م $\overline{\text{م ن}}$ = 5 سم ، م $\overline{\text{م ک}}$ = 7 سم

م $\overline{\text{ن ک}}$ = 4.5 سم ، م $\overline{\text{ک ل}}$ = 3.5 سم

عمل :

(i) $\overline{\text{ل م}}$ 6 سم لمبا کھینچا۔

(ii) ل اور م کو مرکز مان کر ترتیب وار 3.5 سم اور 7 سم رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ ک پر قطع کرتی ہیں۔

(iii) $\overline{\text{م ک}}$ اور $\overline{\text{ک ل}}$ کھینچیے۔

(iv) م اور ک کو مرکز مان کر ترتیب وار 5 سم اور 4.5 سم رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ ن پر قطع کرتی ہیں۔

(v) $\overline{\text{م ن}}$ اور $\overline{\text{ک ن}}$ کھینچیے۔

ک ل م ن مطلوبہ چوکور ہے۔

مثال 3 : (معین بنانا جبکہ اُس کے ضلع کی مقدار اور ایک زاویے کی مقدار دی ہوئی ہو۔)

معین ا ب ج د بنائیے جس میں :

م $\overline{\text{ا ب}}$ = 5.4 سم اور م $\hat{\text{ب}}$ = °75

عمل :

(i) $\overline{\text{ا ب}}$ 5.4 سم لمبا کھینچا۔

(ii) نقطہ ب کو راس مان کر ا $\hat{\text{ب}}$ ج = °75 بنایا۔

(iii) م $\overline{\text{ب ج}}$ = 5.4 سم قطع کیا۔

(iv) ج اور ا کو مرکز مان کر 5.4 سم رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ د پر قطع کرتی ہیں۔

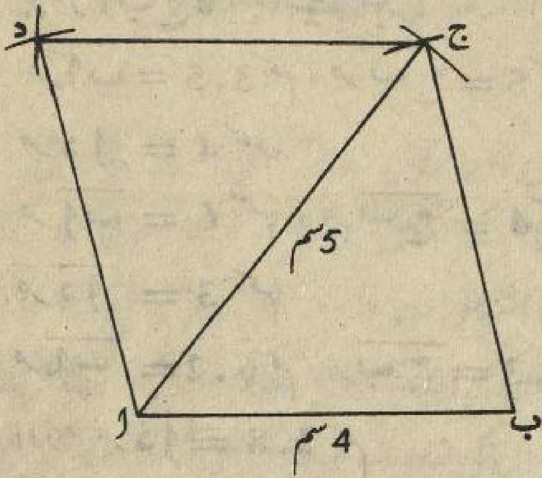
(v) $\overline{\text{ج د}}$ اور $\overline{\text{ا د}}$ کھینچیے۔

ا ب ج د مطلوبہ معین ہے۔

مثال 4 : (معیّن بنانا جبکہ ضلع اور ایک وتر کی مقداریں دی ہوئی ہوں۔)

ا ب ج د ایک معیّن بنائیے جس میں م $\overline{\text{اب}}$ = 4 سم اور م $\overline{\text{اج}}$ = 5 سم

عمل :



(i) $\overline{\text{اب}}$ 4 سم لمبا کھینچا۔

(ii) ا اور ب کو مرکز مان کر ترتیب وار 5 سم اور 4 سم رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ ج پر قطع کرتی ہیں۔

(iii) $\overline{\text{اج}}$ اور $\overline{\text{بج}}$ کھینچے۔

(iv) ا اور ج کو مرکز مان کر 4 سم رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ د پر قطع کرتی ہیں۔

(v) $\overline{\text{اد}}$ اور $\overline{\text{جد}}$ کھینچے۔

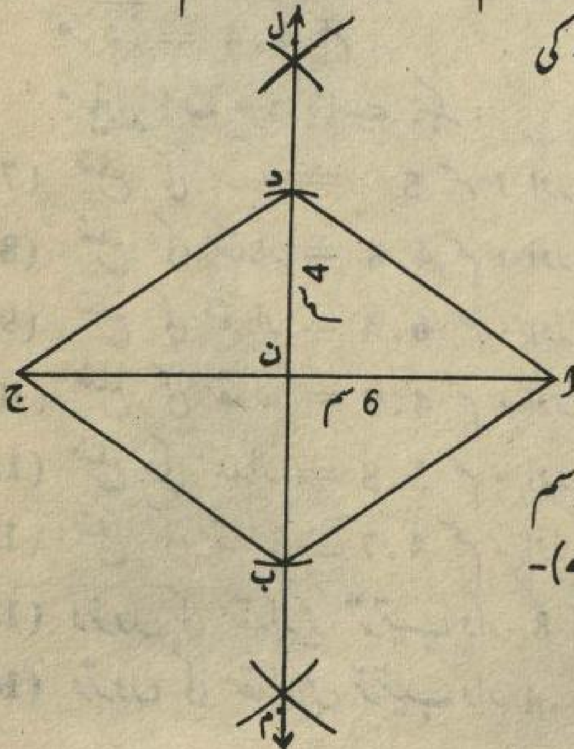
ا ب ج د مطلوبہ معیّن ہے۔

مثال 5 : (معیّن بنانا جبکہ اس کے وتروں کی مقداریں دی ہوئی ہوں۔)

ایک معیّن ا ب ج د بنائیے جس میں م $\overline{\text{اج}}$ = 6 سم ، م $\overline{\text{بد}}$ = 4 سم

عمل : ہم جانتے ہیں کہ معیّن کے وتر ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں۔

معیّن بناتے وقت ہم اسی خاصیت کو استعمال کریں گے۔



(i) $\overline{\text{اج}}$ 6 سم لمبا کھینچا۔

(ii) $\overline{\text{اج}}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{\text{لم}}$ کھینچا۔ نقطہ ن قطعہ خط ا ج کا وسطی نقطہ ہے۔

(iii) $\overleftrightarrow{\text{لم}}$ میں سے م $\overline{\text{نب}}$ = 2 سم اور م $\overline{\text{ند}}$ = 2 سم قطع کیا (کیونکہ دوسرے وتر کی مقدار 4 سم ہے)۔

(iv) $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{جد}}$ اور $\overline{\text{دا}}$ کھینچے۔

ا ب ج د مطلوبہ معیّن ہے۔

مشق 8.4

چوکور اب ج د بنائیے جبکہ :

(1) م اب = 3.5 سم ، م ب ج = 5 سم ، م ا ب ج = °65، م ج د = 4.5 سم اور م د ا = 4 سم

(2) م اب = 6 سم ، م ب ج = 4 سم ، م ب ا د = °60، م ج د = 3.5 سم اور م د ا = 3 سم

(3) م اب = 6.2 سم ، م ب ج = 5.3 سم ، م ا ب ج = °45، م ج د = 3.7 سم اور م د ا = 2.8 سم

چوکور اب ج د بنائیے جبکہ :

(4) م اب = 4.5 سم ، م ب ج = 3 سم ، م ب د = 5.5 سم ، م ج د = 4 سم ، م د ا = 2.8 سم

(5) م اب = 4.6 سم ، م ب ج = 3.8 سم ، م ا ج = 5.5 سم ، م ج د = 4 سم ، م د ا = 4 سم

(6) م اب = 2.3 سم ، م ب ج = 3.2 سم ، م ب د = 5 سم ، م ج د = 4.5 سم ، م د ا = 4.4 سم

معیّن اب ج د بنائیے جبکہ :

(7) ضلع کی مقدار = 5 سم ، اور ایک زاویہ کی مقدار = °55

(8) ضلع کی مقدار = 4.8 سم ، اور ایک زاویہ کی مقدار = °75

(9) ضلع کی مقدار = 6.4 سم ، اور ایک زاویہ کی مقدار = °60

(10) ضلع کی مقدار = 4.5 سم ، اور ایک وتر کی مقدار = 5.4 سم

(11) ضلع کی مقدار = 3.8 سم ، اور ایک وتر کی مقدار = 4.8 سم

(12) ضلع کی مقدار = 4.7 سم ، اور ایک وتر کی مقدار = 6 سم

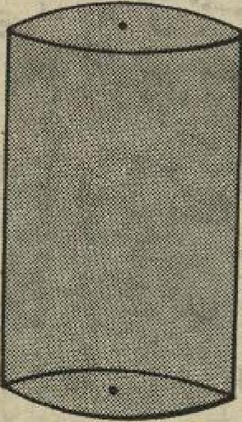
(13) وتروں کی مقداریں ترتیب وار 8 سم اور 6 سم ہوں ۔

(14) وتروں کی مقداریں ترتیب وار 6.4 سم اور 4.6 سم ہوں ۔

باب 9

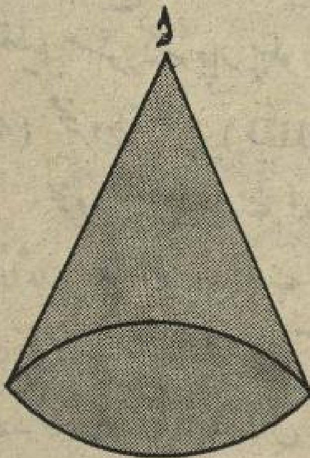
اجسام، ان کی سطح اور جسامت

تمہید: ہم پچھلی جماعتوں میں نقطہ، خط، مستوی اور مکان کے متعلق پڑھ چکے ہیں۔ علاوہ ازیں مستوی اشکال مثلاً چوکور اور ان کی اقسام کے متعلق بھی ہم ساتویں باب میں پڑھ آئے ہیں۔ جہاں ہم نے دیکھا تھا کہ وہاں ہمیں ایسی اشکال سے واسطہ تھا جن میں لمبائی، چوڑائی وغیرہ یعنی دو پیمائشوں کی ضرورت ہوتی تھی، لیکن یہاں ہم ایسے اجسام کے بارے میں بھی پڑھیں گے جن کا وجود کسی مکان میں ہوگا اور اس لیے تین پیمائشوں کی ضرورت پڑے گی جیسا کہ ہم نے چھٹی جماعت میں پڑھا تھا کہ مکعب نما میں لمبائی، چوڑائی اور اُونچائی کی ضرورت ہوتی ہے۔ جن اجسام کے بارے میں ہم یہاں پڑھیں گے ان میں دائروی بیلن، دائروی مخروط، منشور اور مخروط مضلع شامل ہیں۔



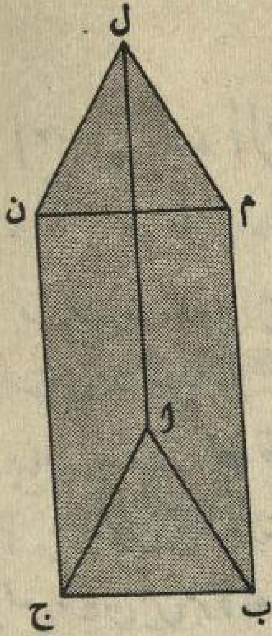
9.1 (1) **دائروی بیلن:** سامنے ایک دائروی بیلن کی شکل ہے جو کہ ٹھوس ہے۔ آپ نے بناسپتی گھی کا ڈبہ، تارکول کا ڈرم اور گول کیک وغیرہ دیکھے ہوں گے۔ ان کی شکل ٹھوس دائروی بیلن کی طرح ہوتی ہے۔

بیلن کا قاعدہ ایک دائروی علاقہ ہے اس لیے اسے دائروی بیلن کہتے ہیں۔ بیلن کا کوئی سیدھا کنارا نہیں ہوتا۔



(2) **دائروی مخروط:** سامنے کی شکل میں ایک مخروط دکھایا گیا ہے۔ لٹّو کی شکل قریباً مخروط کی سی ہوتی ہے۔ مخروط کا قاعدہ بھی ایک دائروی علاقہ ہے۔ اس لیے اسے دائروی مخروط کہتے ہیں۔ نقطہ ا مخروط کا نقطہ راس ہے۔ دائروی مخروط

کا کوئی سیدھا کنارا نہیں ہوتا۔



(3) منشور : ایک مثلثی علاقہ کا ماڈل لیجیے۔ (شکل میں دیکھیے ▲ اب ج)۔ مثلث کے اضلاع $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ ، $\overline{\text{ج ا}}$ میں سے ہر ایک کو قاعدہ مان کر اُن پر متماثل مستطیلی علاقے کھڑے کیجیے اور ان پر ایک اور مثلثی علاقہ کا ماڈل (شکل میں ▲ ل م ن) رکھیے جو ▲ اب ج کے متماثل ہو۔ اس طرح آپ کو ایک منشور حاصل ہو گی۔

▲ اب ج اور ▲ ل م ن اس منشور کے قاعدے ہیں۔ قاعدے چونکہ مثلثی ہیں اس لیے اسے مثلثی منشور کہتے ہیں۔

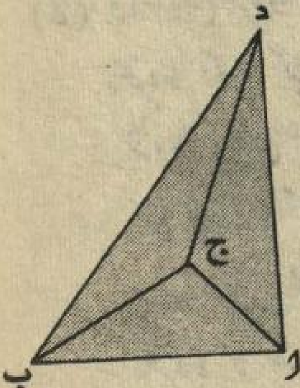
اس کے تین پہلو، مستطیلی علاقہ اب م ل ، مستطیلی علاقہ اج ن ل اور مستطیلی علاقہ ب ج ن م ہیں۔ اگر قاعدے مستطیلی علاقے ہوں تو ایسی منشور کو مستطیلی منشور کہتے ہیں۔ مکعب نما دراصل مستطیلی منشور ہے۔ [دیکھیے شکل (1)] اس منشور کے قاعدے مستطیلی علاقہ اَبَ جَ دَ اور مستطیلی علاقہ اب ج د ہیں۔

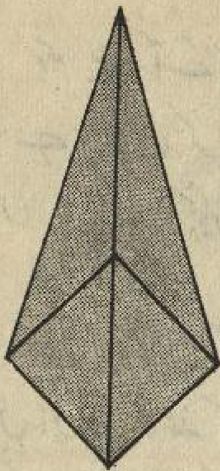
شکل نمبر 1

مستطیلی منشور کے چار پہلو ہوتے ہیں جو کہ علاقے ب ج جَ بَ، ب ا اَ بَ، د ا اَ دَ، ج د دَ جَ ہیں۔

(4) مخروط مضلّع (PYRAMID) :

مخروط مضلّع سامنے کی شکل میں دکھائی گئی ہے۔ اس کا قاعدہ ▲ اب ج ہے۔ اسے مثلثی مخروط مضلّع کہتے ہیں۔ اس کا ایک نقطہ راس ہوتا ہے۔ شکل میں یہ نقطہ راس د ہے۔ قاعدہ کے علاوہ اس کے تین پہلو ہیں جو کہ بذاتِ خود مثلثی علاقے ہیں۔





اگر مخروط مضلع کا قاعدہ ایک مربعی علاقہ ہو تو اسے مربعی مخروط مضلع کہتے ہیں۔ قاعدہ کے علاوہ مربعی مخروط مضلع کے چار پہلو ہوتے ہیں جو کہ مثلثی علاقے ہوتے ہیں۔

اسی طرح اگر مخروط مضلع کا قاعدہ ایک مستطیلی علاقہ ہو تو اسے مستطیلی مخروط مضلع کہتے ہیں۔

مشق 9.1

مندرجہ ذیل اجسام کے (i) کتنے سیدھے کنارے (ii) کتنے نقاط راس اور (iii) کتنے پہلو ہوتے ہیں؟

(1) دائروی بیلن (2) دائروی مخروط (3) مثلثی منشور
(4) مستطیلی منشور (5) مخمسی منشور (6) مربعی مخروط مضلع
(7) مخمسی مخروط مضلع

خالی جگہ پُر کیجیے۔

(8) اگر کسی مثلثی منشور کے قاعدے متماثل الاضلاع مثلثی علاقے ہوں تو ایسی منشور کے پہلو .... ہوں گے۔

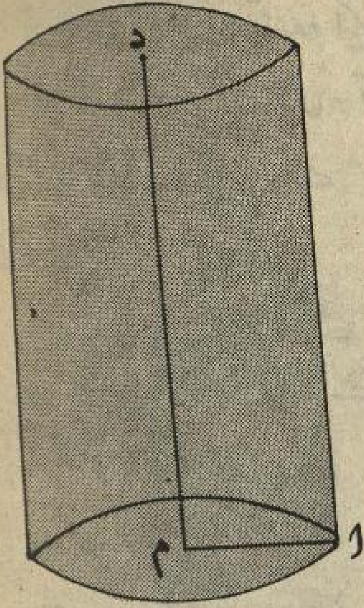
(9) اگر کسی مثلثی منشور کے قاعدے متماثل الساقین مثلثی علاقے ہوں تو ایسی منشور کے .... پہلو متماثل ہوں گے۔

(10) مربعی مخروط مضلع کے .... پہلو .... ہوں گے۔

9.2 دائروی بیلن اور دائروی مخروط کی سطح

یہاں ہم دائروی بیلن کی جس سطح کے بارے میں پڑھیں گے اس میں دائروی بیلن کے قاعدوں پر کی سطح شامل نہیں ہے۔ اسی طرح دائروی مخروط کی سطح میں بھی اس کے قاعدے کی سطح شامل نہیں ہے۔

نوٹ: اس کے بعد جہاں بھی بیلن اور مخروط کے الفاظ استعمال کیے جائیں گے وہاں ان سے مراد بالترتیب دائروی بیلن اور دائروی مخروط ہوگی۔



ہم پڑھ آئے ہیں کہ بیلن کا قاعدہ دائروی علاقہ ہوتا ہے۔ فرض کریں ایک بیلن کے قاعدہ کا رداس r اور اونچائی h ہے یعنی

م ا = r اور م د = h

کاغذ کا ایک مستطیلی تختہ لے کر بیلن کے گرد لپیٹیں اور پھر کاغذ کو کھول کر دیکھیں تو کاغذ کے تختہ کی لمبائی بیلن کی اُونچائی کے برابر ہوگی اور تختہ کی چوڑائی قاعدہ (جو کہ ایک دائروی علاقہ ہے) کے محیط کے برابر ہوگی۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ دائرے کا محیط = $2 \times \pi \times r$

لہٰذا تختے کی لمبائی = h

اور تختے کی چوڑائی = $2 \pi r$

اس لیے تختے کا رقبہ = $2 \pi r \times h$

پس بیلن کی سطح کا رقبہ = $2 \times \pi \times r \times h$

مثال 1: ایک بیلن کے قاعدہ کا رداس 7 سم اور اُونچائی 15 سم ہے۔ سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: بیلن کے قاعدہ کا رداس = 7 سم = r

بیلن کی اُونچائی = 15 سم = h

بیلن کی سطح کا رقبہ = $2 \times \pi \times 7 \times 15$ مربع سم

= $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 15$ مربع سم

= 660 مربع سم

مثال 2: ایک بیلن نما ستون کے قاعدہ کا رداس 35 میٹر اور اُونچائی 70 میٹر ہے۔ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : بیلن کے قاعدہ کا رداس = 35 میٹر = r

بیلن کی اونچائی = 70 میٹر = h

سطح کا رقبہ = $2 \times \pi \times 35 \times 70$ مربع میٹر

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \times 70$ مربع میٹر

$= 15400$ مربع میٹر

مثال 3 : ایک بیلن کی سطح کا رقبہ 2640 مربع سینٹی میٹر ہے اور اس کی اُونچائی 20 سینٹی میٹر ہے۔ قاعدہ کا رداس معلوم کریں۔

حل : سطح کا رقبہ = $2 \times \pi \times r \times h = 2640$ مربع سم

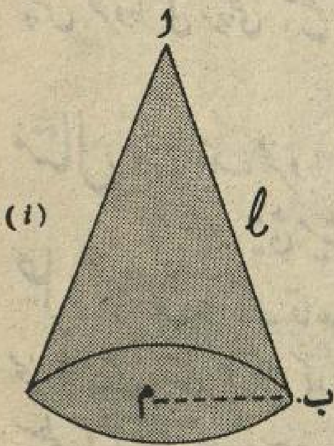
بیلن کی اونچائی = h = 20 سم

بیلن کے قاعدہ کا رداس r فرض کیا گیا ہے۔

اس لیے $2 \times \pi \times r \times h = 2640$

یا $2 \times \frac{22}{7} \times r \times 20 = 2640$

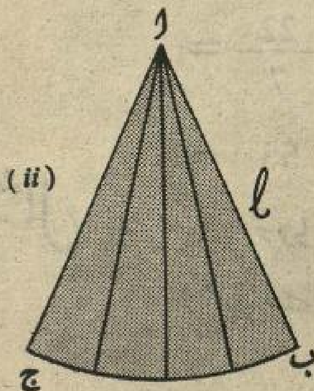
یا $r = \frac{7 \times 2640}{22 \times 20 \times 2} = 21$ سم



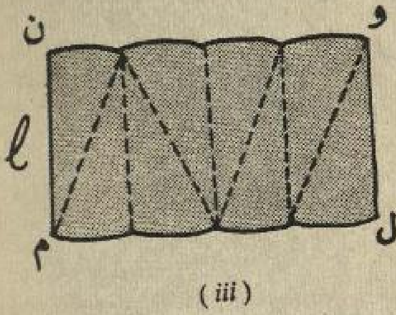
مخروط کی سطح کا رقبہ :

دائروی مخروط کا قاعدہ ایک دائروی علاقہ ہوتا ہے۔ اس کی ترچھی سطح منحنی ہوتی ہے۔ فرض کریں ہمیں ایک ایسے مخروط کی ترچھی سطح کا رقبہ معلوم کرنا ہے جس کے قاعدہ کا رداس r ہے اور جس کے ارتفاعِ مائل (ترچھی بلندی) کی لمبائی l ہے۔

اگر مخروط کو قینچی کی مدد سے نقطہ ا (راس) سے ب کی سیدھ میں کاٹا جائے اور اسے سیدھا کر دیا جائے تو ہمیں ایک قطعہ دائرہ ا ب ج حاصل ہوگا جس کا مرکز ا اور رداس l ہوگا۔ اگر قطعہ دائرہ کی قوس ب ج کو بہت سے چھوٹے چھوٹے حصّوں میں تقسیم کر دیا جائے اور نقاطِ تقسیم کو



قطعاتِ خط کے ذریعہ ا سے ملایا جائے، تو قطعہ دائرہ بہت سے چھوٹے چھوٹے مثلث نما علاقوں میں تقسیم ہو جائے گا۔ (شکل ii)



(iii)

اب اگر ان مثلثی علاقوں کو کاٹ کر ایک دوسرے کے پاس اس طرح رکھا جائے کہ ایک کا راس اُوپر اور دوسرے کا راس نیچے کی طرف ہو تو ہمیں ایک مستطیل نما علاقہ حاصل ہوگا۔(شکل iii)

شکل (i) میں مخروط کے قاعدہ کا محیط کیا ہے؟ ($2\pi r$)۔

شکل (ii) میں قطعہ دائرہ کی قوس ب ج کی لمبائی کیا ہے؟ ($2\pi r$)۔

شکل (iii) میں مستطیل نما علاقہ کے ضلع ل م کی لمبائی کیا ہے؟ $= 2\pi \times r$ کا نصف یعنی πr۔

مستطیل نما علاقہ کے ضلع م ن کی لمبائی کیا ہے؟ $= (l)$

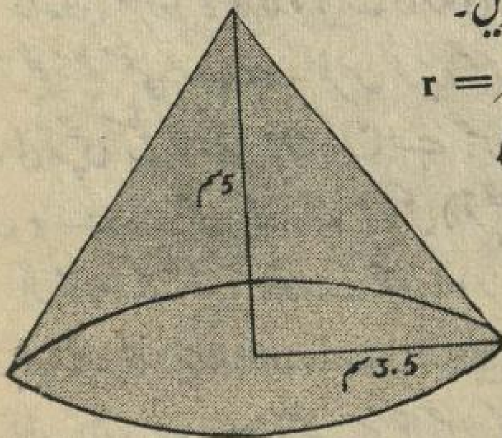
پس مستطیل نما علاقہ کا رقبہ $= l \times \pi \times r$

$= \pi \times r \times l$

پس مخروط کی ترچھی سطح کا رقبہ $= \pi \times r \times l$

$= \pi \times$ قاعدہ کا رداس $\times$ ارتفاعِ مائل کی لمبائی

مثال 4 : ایک مخروط کے قاعدہ کا رداس 3.5 سینٹی میٹر اور ارتفاعِ مائل کی مقدار 5 سینٹی میٹر ہے۔ سطح کی مقدار معلوم کریں۔



حل : مخروط کے قاعدہ کا رداس $= 3.5$ سینٹی میٹر $= r$

مخروط کے ارتفاعِ مائل کی مقدار $= 5$ سینٹی میٹر $= l$

سطح کی مقدار $= \pi \times 3.5 \times 5$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 5$$

$= 55$ مربع سینٹی میٹر

مثال 5 : ایک مخروط کی سطح کا رقبہ 33 مربع میٹر اور اس کے ارتفاعِ مائل کی مقدار 5 میٹر ہے۔ قاعدہ کا رداس معلوم کیجیے۔

حل : مخروط کی سطح کا رقبہ = 33 مربع میٹر
ارتفاعِ مائل کی مقدار = 5 میٹر
فرض کیا قاعدہ کا رداس = r
سطح کا رقبہ $\pi \times 5 \times r$
ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ سطح کا رقبہ = 33 مربع میٹر
اس لیے $33 = \pi \times 5 \times r$

پس $r = \frac{33}{\pi \times 5} = \frac{7}{22} \times \frac{33}{5} = \frac{21}{10} = 2.1$ میٹر

مشق 9.2

بیلن کی سطح کا رقبہ معلوم کریں جبکہ : $(\pi = \frac{22}{7})$ اور

(1) قاعدہ کا رداس = 8 سم ، اونچائی = 14 سم
(2) قاعدہ کا رداس = 12 سم ، اونچائی = 21 سم
(3) قاعدہ کا رداس = 4.2 میٹر ، اونچائی = 7 میٹر
(4) قاعدہ کا رداس = 15 ڈیسی میٹر ، اونچائی = 2.1 میٹر

مخروط کی سطح کا رقبہ معلوم کریں جبکہ :

(5) قاعدہ کا رداس = 7.5 سم ، ارتفاعِ مائل کی مقدار = 14 سم
(6) قاعدہ کا رداس = 12 ڈیسی میٹر ، ارتفاعِ مائل کی مقدار = 28 ڈیسی میٹر
(7) قاعدہ کا رداس = 11 ڈیسی میٹر ، ارتفاعِ مائل کی مقدار = 12 ڈیسی میٹر
(8) قاعدہ کا رداس = 15 ڈیسی میٹر ، ارتفاعِ مائل کی مقدار = 18 ڈیسی میٹر
(9) ایک بیلن کی سطح کا رقبہ 132 مربع ڈیسی میٹر اور قاعدہ کا رداس 3.5 ڈیسی میٹر ہے ۔ اونچائی معلوم کریں ۔
(10) ایک بیلن کی سطح کا رقبہ 704 مربع سم اور اونچائی 14 سم ہے ۔ قاعدہ کا رداس معلوم کریں ۔

(11) ایک مخروط کی سطح کا رقبہ 1056 مربع ڈیسی میٹر اور قاعدہ کا رداس 12 ڈیسی میٹر ہے۔ ارتفاعِ مائل کی مقدار معلوم کریں۔

(12) ایک مخروط کی سطح کا رقبہ $\frac{5940}{7}$ مربع سم اور ارتفاعِ مائل کی مقدار 18 سم ہے۔ قاعدہ کا رداس معلوم کریں۔

9.3 بیلن اور مخروط کی جسامت

جسامت : کسی مجسّم کی سطح اور اندرونہ کے یونین کو مجسّم کی "وسعت" کہتے ہیں اور وسعت کی مقدار کو مجسّم کی جسامت کہتے ہیں۔

ہم رقبے کے لیے اکائیاں مربع سینٹی میٹر، مربع ڈیسی میٹر، مربع میٹر وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔ جسامت کے لیے اکائیاں مکعب سینٹی میٹر، مکعب ڈیسی میٹر اور مکعب میٹر وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔

مکعب سینٹی میٹر سے مراد ایک ایسے مکعب کی جسامت ہے جس میں لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ایک ایک سینٹی میٹر ہو۔

(1) بیلن کی جسامت : بیلن کی جسامت = قاعدہ کا رقبہ × بیلن کی اونچائی

فرض کریں اگر کسی بیلن کے قاعدہ کا رداس r اور اونچائی h ہو تو

بیلن کے قاعدہ کا رقبہ = دائروی علاقہ کا رقبہ جس کا رداس r ہے = $\pi \times r^2$

اس لیے بیلن کی جسامت = $\pi \times r^2 \times h$

مثال 1: ایک بیلن کے قاعدہ کا رداس 35 سم اور اونچائی 50 سم ہے۔ بیلن کی جسامت معلوم کریں۔

حل : بیلن کے قاعدہ کا رداس = 35 سم = r

بیلن کی اونچائی = 50 سم = h

بیلن کی جسامت = $\pi \times (35)^2 \times 50$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \times 50$

= 192500 مکعب سینٹی میٹر

مثال 2 : ایک گڑھا بیلن شکل کا ہے جس کے قاعدہ کا رداس 15 میٹر اور گہرائی 28 میٹر ہے۔ اسے بھرنے کے لیے کتنے مکعب میٹر مٹی ڈلوانی پڑے گی۔

حل : گڑھے کے قاعدہ کا رداس = 15 میٹر = r

گڑھے کی گہرائی = 28 میٹر = h

جسامت = $\pi \times 15^2 \times 28$

$= \frac{22}{7} \times 15 \times 15 \times 28 = 19800$ مکعب میٹر

(2) مخروط کی جسامت :

مخروط کی جسامت = $\frac{\text{قاعدہ کا رقبہ}}{3}$ × ارتفاع کی مقدار

فرض کریں اگر کسی مخروط کے قاعدہ کا رداس r اور ارتفاع کی مقدار P ہو تو

مخروط کے قاعدہ کا رقبہ = $\pi \times r^2$

پس مخروط کی جسامت = $\frac{\pi \times r^2 \times P}{3}$

مثال 3 : ایک مخروط کے قاعدہ کا رداس 3.1 سم اور ارتفاع کی مقدار 7 سم ہے۔ مخروط کی جسامت معلوم کریں۔

حل : مخروط کے قاعدہ کا رداس = 3.1 سم = r

مخروط کے ارتفاع کی مقدار = 7 سم = P

مخروط کی جسامت = $\frac{\pi \times r^2 \times P}{3}$

$= \frac{\pi \times (3.1)^2 \times P}{3}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 3.1 \times 3.1}{3} = \frac{211.42}{3}$

= 70.47 مکعب سم

مثال 4 : ایک مخروطی مینار کے قاعدہ کا رداس 8 میٹر اور ارتفاع کی مقدار 42 میٹر ہے۔ اس کی جسامت معلوم کریں۔

حل : مخروطی مینار کے قاعدہ کا رداس = 8 میٹر = r
مینار کے ارتفاع کی مقدار = 42 میٹر = P

جسامت = $\frac{P\,r^2 \times \pi}{3}$ = $\frac{22}{7} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{3} \times 42$ = 2816 مکعب میٹر

مشق 9.3

بیلن کی جسامت معلوم کریں جبکہ :

(1) قاعدہ کا رداس = 14 سم ، اونچائی = 25 سم
(2) قاعدہ کا رداس = 3.5 میٹر ، اونچائی = 5 میٹر
(3) قاعدہ کا رداس = 112 ڈیسی میٹر ، اونچائی = 150 ڈیسی میٹر
(4) قاعدہ کا رداس = 11 میٹر ، اونچائی = 28 میٹر

مخروط کی جسامت معلوم کریں جبکہ :

(5) قاعدہ کا رداس = 1.4 میٹر ، ارتفاع کی مقدار = 3 میٹر
(6) قاعدہ کا رداس = 15 سم ارتفاع کی مقدار = 2.1 ڈیسی میٹر
(7) قاعدہ کا رداس = 13 ڈیسی میٹر ارتفاع کی مقدار = 105 سم
(8) قاعدہ کا رداس = 25 سم ارتفاع کی مقدار = 112 سم
(9) ایک مخروطی مینار کے قاعدہ کا رداس 21 میٹر اور ارتفاع کی مقدار 185 میٹر ہے۔ اس مینار کو تعمیر کرنے میں کتنے مکعب میٹر مواد استعمال ہوا ہوگا ؟
(10) ایک کنواں کھودنا ہے جس کے قاعدہ کا رداس 5 میٹر اور گہرائی 21 میٹر ہو۔ اس میں سے کتنے مکعب میٹر مٹی نکلے گی ؟
(11) میونسپل کمیٹی کو ایک ایسا بیلن نما گڑھا پُر کرنا ہے جس کے قاعدہ کا رداس 7 میٹر اور اور گہرائی 15 میٹر ہے۔ بتائیے کتنی مٹی درکار ہوگی ؟
(12) ایک مخروطی شکل کے مینار کے قاعدہ کا رداس 8 میٹر اور ارتفاع کی مقدار 84 میٹر ہے ۔ اس کی جسامت معلوم کریں۔

باب 10

اعادہ نصاب حصّہ مڈل

مشق 10.1 سیٹ

(1) مندرجہ ذیل سیٹوں کو طریقہ اندراج سے لکھیے :

(i) پہلے پانچ مفرد اعداد کا سیٹ۔

(ii) لفظ "پاکستان" کے حروف کا سیٹ۔

(iii) ایسے مفرد اعداد کا سیٹ جو جفت ہوں۔

(iv) قمری سال کے ان مہینوں کا سیٹ، جن کا آخری حرف 'ن' ہو۔

(v) چار ضلعوں والی مثلثوں کا سیٹ۔

(2) نیچے دیے ہوئے سیٹوں کو بیانیہ طریقے سے ظاہر کیجیے :

(i) {0، 1، 2، 3، ....}

(ii) {5، 10، 15، 20، 25}

(iii) {13، 15، 17، 19}

(iv) {بہار، گرما، خزاں، سرما}

(v) {ستمبر، اکتوبر، نومبر، دسمبر}

(3) ذیل کے سیٹوں کی ایک ایک مثال دیجیے :

(i) مساوی سیٹ (ii) مترادف سیٹ (iii) متراکب سیٹ

(iv) غیر مشترک سیٹ (v) تحتی سیٹ۔

(4) مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ متناہی ہیں اور کون سے غیر متناہی؟

(i) سال کے مہینوں کا سیٹ۔

(ii) دُنیا میں رہنے والے لوگوں کا سیٹ۔

(iii) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$

(iv) ایک درخت کے پتّوں کا سیٹ۔

(v) مکمل اعداد کا سیٹ

(vi) '1' سے چھوٹے قدرتی اعداد کا سیٹ۔

(vii) {3 ، 4 ، 5 ، 6 ، ...... ، 80}

(5) مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کیجیے ؛

(i) جن سیٹوں کے درمیان (1 — 1) مطابقت قائم کی جا سکے، انھیں .... کہتے ہیں ۔

(ii) الف = {0} ایک .... سیٹ ہے ۔

(iii) اگر جیم = {ا، ب، س} اور قاف = {ب ، د ، ط}
تو جیم ∪ قاف = ... اور جیم ∩ قاف = ...

(iv) دو غیر مشترک سیٹوں کا تقاطع ...... سیٹ ہوتا ہے ۔

(v) اگر میم = تمام جفت اعداد کا سیٹ اور نون = تمام طاق اعداد کا سیٹ
تو میم ∪ نون = ... اور میم ∩ نون = ...

(vi) {1 ، 2 ، 3} ، {1 ، 3} کا ..... سیٹ ہے ۔

(vii) {∅} ∪ { } = ...

(viii) { } ∩ {4 ، 8 ، 16} = ...

(ix) $\frac{2}{3}$ کا .... $\frac{3}{2}$ ہے۔

(x) مساوات $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ میں .... کا استعمال کیا گیا ہے۔

(6) با = {1 ، 2 ، 3} کے تمام ممکن تحتی سیٹ لکھیے۔ تحتی سیٹوں کی تعداد بھی بتائیے ۔

(7) مندرجہ ذیل سیٹوں کے اتصال (یونین) اور تقاطع (انٹرسیکشن) کو وین اشکال سے ظاہر کیجیے :

(i) الف = {1 ، 2 ، 3} اور با = {4 ، 5 ، 6}

(ii) میم = {1 ، 2 ، 3} اور نون = {3 ، 4 ، 5}

(iii) جیم = {1 ، 2 ، 3} اور لام = {2 ، 3}

(8) اگر U = تمام قدرتی اعداد کا سیٹ ، الف = تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ
با = تمام مثبت طاق اعداد کا سیٹ جیم = تمام مفرد اعداد کا سیٹ
تو مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے درست ہیں اور کون سے غلط ؟
(i) الف ⊂ U (ii) U ⊃ با (iii) الف ∪ جیم = U
(iv) الف ∪ با = U (v) جیم ⊂ با (vi) الف ∩ با = جیم

(9) اگر U = {3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}
الف = {3 ، 5 ، 7 ، 9} ، با = {4 ، 5 ، 6 ، 8}
اور جیم = {4 ، 6 ، 7}
تو مندرجہ ذیل کے ممبران معلوم کیجیے :
(i) الف — با (ii) (الف — با)َ (iii) (الف ∩ با)َ
(iv) الف ∪ (با ∩ جیم) (v) با ∩ (الف ∪ جیم)
(vi) الفَ ∪ باَ (vii) الف ∩ (جیم ∩ با)

(10) اگر تین سیٹ الف ، با اور جیم ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر دو متراکب سیٹ ہوں تو مندرجہ ذیل کو بذریعہ وین اشکال ظاہر کیجیے ۔
(i) الف — با (ii) جیم — با (iii) (الف ∩ با) ∩ جیم
(iv) (الف ∪ با) ∩ جیم (v) (الف ∩ با) ∪ جیم
(vi) الف ∪ (با ∩ جیم) (vii) الف ∩ (با ∪ جیم)

مشق 10.2

عادِ اعظم ، ذو اضعافِ اقل اور جذر

(1) 1050 ، 925 اور 775 کا عادِ اعظم معلوم کریں ۔

(2) ایسا بڑے سے بڑا عدد دریافت کیجیے جس پر اگر 398 ، 436 ، 542 کو تقسیم کریں تو علی الترتیب 7 ، 11 ، 15 باقی بچیں ۔
[اشارہ : 391 = (398 — 7) ، 425 = (436 — 11) ، 527 = (542 — 15) کا عاد اعظم نکالیے ۔]

(3) 55 ، 84 ، 110 ، 220 کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(4) ایک ٹوکرے میں کم از کم کتنے سیب ہوں کہ وہ 12 یا 20 یا 24 یا 30 بچوں میں پورے پورے تقسیم ہو سکیں۔

(5) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جس کو اگر 12 ، 16 ، 18 پر تقسیم کیا جائے تو ہر صورت میں 8 باقی بچے۔
(اشارہ : اعداد کا ذواضعاف اقل نکال کر اُس میں 8 جمع کر دیں۔)

(6) دو اعداد کا عادِ اعظم 53 اور ذواضعاف اقل 11130 ہے۔ اگر ایک عدد 742 ہو تو دوسرا عدد بتائیے۔

$$\left(\text{اشارہ : دوسرا عدد} = \frac{\text{عادِ اعظم} \times \text{ذواضعاف اقل}}{\text{دیا ہوا عدد}} \right)$$

(7) جذر معلوم کیجیے۔

(i) 2582449 (ii) .01083681 (iii) $32\frac{137}{484}$

(8) ذیل کے جذر دو مراتب اعشاریہ تک نکالیے :

(i) 5 (ii) 14.126

(9) ایک مسجد کے لیے 14450 روپے چندہ اکٹھا ہوا۔ ہر ایک آدمی نے کل آدمیوں کی تعداد سے دوگنے روپے دیے۔ بتائیے آدمی کتنے تھے اور ہر ایک نے کتنا چندہ دیا۔

(10) ایک مستطیل کھیت کا طول اُس کے عرض سے تگنا ہے۔ اگر اُس کا رقبہ 2352 مربع میٹر ہو، تو اُس کا طول معلوم کیجیے۔

مشق 10.3

اساس پانچ اور دو کے نظام

(1) اعشاری نظام میں تحویل کریں :

(i) $(1022)_5$ (ii) $(1110)_2$

(2) اعشاری نظام سے اساس پانچ کے نظام میں تبدیل کر کے مختصر کریں :

$$21 + 62 - 108$$

(3) اساس دو کے نظام میں عمل کریں اور اعشاری نظام میں تبدیل کر کے اپنے جواب کی پڑتال کریں :

$$(111)_2 - (10)_2 + (1101)_2$$

(4) باہم ضرب دیں اور اعشاری نظام میں تبدیل کر کے جواب کی پڑتال کریں :

(i) $(32)_5 \times (240)_5$ (ii) $(101)_2 \times (1101)_2$

مشق 10.4

کسور عام و کسور اعشاریہ

[کسور کے اختصار میں ذیل کی ترتیب یاد رکھیے :

(i) خطوط وحدانی (ii) کا (iii) $\div$ (iv) $\times$ (v) $+$ ، $-$]

مختصر کیجیے اور جواب اعشاریہ میں لکھیے (سوالات 1 تا 5)

(1) $3\frac{1}{4} + 12\frac{1}{12} \times 9\frac{1}{6} \div 4\frac{2}{5}$

(2) $1\frac{11}{21}$ کا $3\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} - 5\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$

حل : جملہ $= \frac{32}{21}$ کا $\frac{7}{2} \div \frac{2}{3} - \frac{21}{4} \times \frac{7}{2} \div \frac{2}{3}$

$$= \frac{16}{3} \div \frac{2}{3} - \frac{21}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{8} - 1$$

$$= \frac{1-8}{8} = \frac{7}{8}$$

$$.875 = \begin{array}{r} .875 \\ 8\overline{)7.000} \\ \underline{6\ 4} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

(3) $\dfrac{\frac{1}{5} \text{ کا } \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \div \frac{1}{2}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \text{ کا } \frac{1}{3} \div \frac{1}{2}}$

(4) $6 + \left[\left\{\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \div \frac{3}{10}\right\} \times \frac{1}{12}\right]$

(5) $5\frac{1}{2} - \left[\left\{\frac{3}{13} \times \left(\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)\right\} \div \frac{2}{3}\right]$

(6) 4.25 اور 1.8 کے مجموعے اور فرق کے حاصل ضرب کو 2.5 پر تقسیم کیجیے۔

(7) $3.75 \div 2.5 \times 12.5 - 2. + 8.75$ کا اختصار کریں۔

(8) مندرجہ ذیل متواتر کسور اعشاریہ کو کسور عام میں تحویل کریں۔

(i) .... .333

(ii) .... .252525

(iii) .... .5222

(9) ایک آدمی اپنی ماہوار تنخواہ کا $\frac{1}{5}$ حصہ اپنے جیب خرچ کے لیے رکھتا ہے، اور باقی تنخواہ کا $\frac{4}{5}$ دیگر اخراجات کے لیے۔ اگر اس کی ماہوار بچت 70 روپے ہو تو اس کی ماہوار تنخواہ بتائیں۔

(10) نسیمہ نے ایک دن ایک کتاب کا .375 حصہ پڑھا۔ اگلے دن اُس نے باقی کتاب کا .8 حصہ پڑھا۔ اگر اب 60 صفحے باقی ہوں، تو بتائیے کہ کتاب کے کُل کتنے صفحے ہیں۔

مشق 10.5
اوسط اور گراف

(1) (ا) 4.3 ، 8.9 ، 6.4 ، 12.9 ، 18.7 کا حسابی وسط معلوم کریں۔

(ب) مندرجہ ذیل جدول سے اوسط معلوم کیجیے :

گروپ	تعدّد
10 – 5	4
15 – 10	10
20 – 15	23
25 – 20	37
30 – 25	14
35 – 30	6

(2) (ا) ایک جنرل سٹور میں آٹھ آدمی کام کرتے ہیں۔ اُن کی ماہانہ اُجرت 300 ، 250 ، 275 ، 300 ، 300 ، 250 ، 300 ، 340 روپے ہے۔ اُن کی اُجرت کا عادہ نکالیں۔

(ب) ایک طالب علم کی چھ مہینوں کی حاضریاں بالترتیب 36 ، 46 ، 48 ، 20 ، 45 ، 47 ہیں۔ اس کی حاضریوں کا وسطانیہ معلوم کریں۔

(3) 15 لڑکوں کا اوسط وزن 40 کلوگرام 7 ہیکٹوگرام ہے۔ اگر ان میں سے 12 لڑکوں کا اوسط وزن 42 کلوگرام 6 ہیکٹوگرام ہو تو باقی 3 لڑکوں کا اوسط وزن معلوم کریں۔

(4) 15 گھوڑوں کی اوسط قیمت 2040 روپے ہے۔ ان میں سے پہلے 9 گھوڑوں کی اوسط قیمت 1950 روپے ہے اور آخری 7 گھوڑوں کی اوسط قیمت 2160 روپے ہے۔ نویں گھوڑے کی قیمت بتائیے۔

(5) ایک ہائی سکول کے، ذیل کے پانچ سالوں کے نتائج مڈل سکول امتحان کا بار گراف بنائیے۔

1985	1984	1983	1982	1981
%100	%95	%90	%85	%80

(6) ذیل کے جدول میں ایک تندرست لڑکی کا، عمر کے لحاظ سے وزن درج ہے۔ اسے لائن گراف میں ظاہر کیجیے۔

عمر برسوں میں	2	6	10	14	18
وزن کلوگراموں میں	11.5	19.5	29	45	56

(7) ایک کنبہ کے مندرجہ ذیل ماہوار اخراجات کو پائی گراف سے ظاہر کیجیے:
خوراک 400 روپے، پوشاک 180 روپے، کرایہ مکان 180 روپے،
ایندھن 90 روپے، متفرق 230 روپے۔

مشق 10.6

فیصد، سُود مفرد و مرکّب، نفع و نقصان

سُود (رِبا) از رُوئے قرآن حرام ہے۔ لیکن چونکہ اِس وقت دُنیا میں سُودی نظام جاری ہے اس لیے طالب علموں کو سُود کی ماہیت کا عِلم ہر حال میں ہونا لازمی ہے۔ چنانچہ طلبا کے لیے سُود سے متعلق سوالات شامل کیے جا رہے ہیں۔

(1) ایک شخص نے اپنی جائداد کا 40٪ اپنے لڑکے کو اور 20٪ اپنی لڑکی کو دیا جبکہ 10٪ خیرات کر دیا۔ اب اس کے پاس 60,000 روپے باقی ہیں۔ بتائیے اُس نے لڑکے کو کیا دیا۔

(2) رضیہ کے پاس 4000 روپے مالیت کا سونا اور چاندی تھی۔ اس کے علاوہ کچھ نقد روپیہ بھی اس کے پاس تھا۔ اگر اس نے 160 روپے زکوٰۃ ادا کی ہو تو معلوم کیجیے کہ اس کے پاس نقد روپے کتنے تھے۔

(3) ایک دلال نے انور کا ایک پلاٹ 11000 روپے میں سہیل کے ہاتھ بیچ کر دونوں طرف سے $1\frac{1}{2}$٪ کمیشن وصول کی۔ اُس کی کل کمیشن دریافت کیجیے اور یہ بھی بتائیں کہ انور کو کیا مِلا۔

(4) 2500 روپے، $3\frac{1}{5}$٪ شرح سالانہ سود مفرد پر قرض لیے گئے۔ $1\frac{1}{2}$ سال

کے بعد کُل کتنا سود ادا کرنا پڑے گا؟

(5) 2000 روپے کا سود مرکب 5 % سالانہ شرح سے 3 سال کے لیے معلوم کریں۔

(6) 4 % سالانہ شرح سے 1250 روپے کا $2\frac{1}{2}$ سال کا سود مرکب دریافت کیجیے۔

[اشارہ : سود مرکب پر کل زر = $1250\left(1+\frac{4}{100}\right)^2\left(1+\frac{2}{100}\right)$]

(7) 3000 روپے کے سود مرکب اور سود مفرد کا فرق، 2 سال کے لیے 5 % سالانہ شرح سے معلوم کیجیے۔

(8) افضل نے 4000 روپے، 6 % سالانہ شرح سود مفرد پر قرض لے کر 5 % سالانہ شرح سود مرکب پر قرض دے دیے۔ اگر 2 سال بعد رقم واپس کی جائے تو بتائیے کہ افضل کو اس کاروبار میں کتنا نفع یا نقصان ہوا۔

(9) لٹھے کا 40 میٹر کا ایک تھان 50 روپے میں خریدا گیا۔ 2 میٹر کپڑا کم نکلا۔ باقی کو 1.50 روپے میٹر کے حساب سے فروخت کیا گیا۔ کتنے فیصد نفع یا نقصان ہوا؟

(10) مالٹے 2.50 روپے فی درجن کے حساب سے خرید کر 4 روپے فی کوڑی کے حساب سے بیچ دیے گئے۔ نفع یا نقصان فی صد بتائیے۔

[اشارہ : مالٹوں کی تعداد، 60 (12 ، 20 کا ذواضعاف اقل) فرض کیجیے۔]

(11) 3240 روپے میں ایک گھوڑا بیچنے سے ایک شخص کو 20 % نفع ہوتا ہے۔ گھوڑے کی قیمت خرید بتائیے۔ اگر وہ اسے صرف 2808 روپے میں بیچے تو اس کا نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

(12) کچھ سامان 248 روپے میں بیچنے سے مجھے 7 % نقصان ہوگا۔ میں یہ سامان کتنے میں فروخت کروں کہ مجھے 8 % نفع ہو۔

(13) ایک آدمی نے دو مکان 19200 روپے فی مکان کے حساب سے بیچے۔ اُسے ایک مکان پر 20 % نفع اور دوسرے پر 20 % نقصان ہوا۔ اس کا دونوں مکانوں پر کل نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

مشق
10·7
نسبت و تناسب، وراثت اور شراکت

(1) مندرجہ ذیل فقرات میں جو غلطی ہے، اس کی نشاندہی کیجیے۔

(i) 5 ہیکٹوگرام اور 8 ڈیکاگرام وزن میں 5 اور 8 کی نسبت ہے۔

(ii) 20 کلومیٹر اور 30 کلومیٹر میں نسبت $\frac{2}{3}$ کلومیٹر ہے۔

(iii) ایک روپیہ اور 10 پیسوں میں 1، 10 کی نسبت ہے۔

(iv) 10 روپوں اور 15 روپوں میں 3 اور 2 کی نسبت ہے۔

(v) $\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}, \ldots \}$ مترادف نسبتوں کا سیٹ ہے۔

(2) ایک جائداد کے $\frac{3}{7}$ حصّے کی قیمت 31200 روپے ہے۔ اُس کے $\frac{4}{13}$ حصّے کی قیمت کیا ہوگی؟

(3) ایک کیمپ میں 560 سپاہیوں کے لیے 60 دن کی خوراک موجود ہے۔ 20 دن کے بعد 210 سپاہی چلے گئے۔ بتائیے باقی خوراک باقی آدمیوں کے لیے کتنے دنوں تک کافی ہوگی۔

(4) ایک ریل گاڑی 35 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کچھ فاصلہ ایک گھنٹہ 40 منٹ میں طے کرتی ہے۔ اگر رفتار 15 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو یہی فاصلہ کتنے عرصے میں طے ہوتا؟

(5) 100، 100 کلوگرام وزن والی گندم کی 20 بوریوں کی قیمت 1800 روپے ہے۔ بتائیے 120 کلوگرام وزن والی 15 بوری گندم کی قیمت کیا ہوگی؟

(6) ایک قلعہ میں 800 آدمیوں کے لیے 30 دن کی خوراک موجود تھی۔ 10 دن کے بعد 200 آدمی اور آ گئے۔ باقی خوراک کتنے دنوں تک کافی ہوگی جب کہ فی کس خوراک کی مقدار بھی $\frac{2}{3}$ کر دی جائے۔

(7) ایک کام 60 دن میں مکمل کرنا ہے اور 30 آدمی کام پر لگائے گئے ہیں۔

40 دن کے بعد معلوم ہوا کہ کُل کام کا $\frac{3}{5}$ حصّہ مکمل ہوا ہے۔ کتنے آدمی اور لگائے جائیں کہ کام وقتِ مقرّرہ پر ختم ہو جائے؟

(8) ایک ٹھیکیدار نے ایک پُل دو مہینے میں تعمیر کرانے کا ٹھیکہ لے کر 90 آدمی کام پر لگائے۔ 15 دن کے بعد معلوم ہوا کہ ابھی $\frac{5}{6}$ حصّہ کام باقی ہے۔ بتائیے وہ کتنے آدمی اور لگائے کہ کام وقتِ مقرّرہ پر ختم ہو جائے۔

[اشارہ : جو کام مکمل ہوا $= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$]

(9) 15000 روپے کے ترکہ کو ایک بیوہ ، دو لڑکوں اور 4 لڑکیوں میں اس طرح تقسیم کریں کہ بیوہ کو $\frac{1}{8}$ حصّہ ملے اور باقی میں سے ہر لڑکے کو لڑکی کے حصّے سے دو گنا ملے جبکہ مرحوم کے ذمّے 3000 روپے قرضہ بھی ہے۔

(10) تین اشخاص اعجاز ، نعیم اور کلیم ایک تجارت میں شریک ہوئے۔ اعجاز نے 8400 روپے ، نعیم نے 12000 روپے اور کلیم نے 15600 روپے تجارت میں لگائے۔ اعجاز کو بطور مینجر ، کام کرنے کے عوض ، کُل نفع میں سے 250 روپے ماہوار کے حساب سے اُجرت ملتی ہے۔ باقی نفع تینوں میں اُن کے سرمایوں کی نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر سال کے آخر میں کُل نفع 13800 روپے ہو تو اُس میں سے ہر ایک کا حصّہ دریافت کیجیے۔

(11) نعیم نے 5000 روپے سے کاروبار شروع کیا۔ 4 ماہ بعد سلیم 7000 روپے لگا کر اس کے ساتھ شریک ہو گیا۔ 8 ماہ مزید گزر جانے کے بعد 1450 روپے کا منافع ہوا۔ بتائیے ہر ایک کو کیا ملا۔

(12) ا : ب : ج معلوم کریں جبکہ :

(i) ا : ب = 3:2 ، ب : ج = 5:4

(ii) ا : ب = 4:3 ، ج : ا = 5:2

(13) 295 روپے عذرا ، فوزیہ اور نعمان میں اس طرح تقسیم کیجیے کہ اگر عذرا کو 3 روپے ملیں تو فوزیہ کو 4 روپے اور اگر فوزیہ کو 5 روپے ملیں تو نعمان کو 6 روپے۔

مشق 10.8

جبری جملوں کی قیمت اور اُن پر بنیادی عوامل

(1) $4ا^2 - 6اب + 9ج^2$ کی قیمت نکالیے جبکہ $ا = 1$، $ب = -2$، $ج = 3$

(2) اگر $ا = 3$، $ب = 2$ تو $ا^3 - 3ا^2ب + 3اب^2 - ب^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

(3) مختصر کیجیے : $2ا - [2ب - \{3ج - (ا - 2ب + 3ج)\}]$

(4) $5ا - [8ب - \{7ج - (2ا + 3ب - ج)\}]$ کی قیمت معلوم کریں۔
جبکہ $ا = 5$، $ب = 2$، $ج = 0$

(5) $ا^2 + 3اب - ب^2$ اور $2اب - ا^2 + 2ب^2$ کے حاصل جمع میں سے
$3ب^2 - 4ا^2$ کو تفریق کیجیے۔

(6) $5لا^2 - 6لا\,ما + 3ما^2$ میں کیا جمع کیا جائے کہ مجموعہ $8لا^2 - 4لا\,ما + 3ما^2$
حاصل ہو؟

(7) حاصل ضرب معلوم کیجیے :

(i) $(لا^2 + لا + 1)(لا^2 - لا + 1)$

(ii) $(9ب^2 + 6ب\,ج + 4ج^2)(3ب - 2ج)$

(8) $6ا^2 - 7اب - 20ب^2$ کو $3ا + 4ب$ پر تقسیم کیجیے۔

(9) $ا^3 - 3ا^2ب + 3اب^2 - ب^3$ کو $ا - ب$ پر تقسیم کریں۔

(10) حل کیجیے : $(8ا^3 - 27ب^3) \div (2ا - 3ب)$

مشق 10.9

کلیات

(1) مختصر کیجیے :

(i) $(2ا + 3ب)^2 + (2ا - 3ب)^2$

(ii) $(3لا + 2ما)^2 - (3لا - 2ما)^2$

(2) کلیے کی مدد سے 1003 کا مربع معلوم کیجیے۔

(3) مناسب کلیے کے استعمال سے $(895)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) مسلسل حاصل ضرب معلوم کریں:

(i) (3ا + 2ب) (9ا^2 + 4ب^2) (3ا − 2ب)

(ii) (لا + ما) (لا^2 + ما^2) (لا − ما) (لا^4 + ما^4)

(5) کلیہ کے ذریعے 1010 اور 990 کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

(6) خالی جگہیں پُر کیجیے:

(i) (لا + 3) (لا + 4) = لا^2 + ... (3 + 4) + (3 × ....)

(ii) (لا − 5) (لا + 2) = لا^2 + لا (.... + 2) + (.....) × 2

(iii) (5لا + 2) (5لا − 3) = (...)^2 + 5لا (2 − ....) + ... × (−3)

(7) لا^2 + ما^2 کی قیمت بتائیے جبکہ:

(i) لا + ما = 4 ، لا ما = 3

(ii) لا − ما = 2 ، لا ما = 15

(8) لا^2 + $\frac{1}{\text{لا}^2}$ کی قیمت نکالیے جبکہ:

(i) لا + $\frac{1}{\text{لا}}$ = 5 (ii) لا − $\frac{1}{\text{لا}}$ = 7

(9) اگر ا^2 + ب^2 = 29 اور اب = 10 تو ا + ب اور ا − ب کی قیمت معلوم کریں۔

(10) لا ما کی قیمت کیا ہوگی جبکہ:

(i) لا^2 + ما^2 = 13 ، لا + ما = 5 (ii) لا^2 + ما^2 = 20 ، لا − ما = 2

مشق 10.10

اجزائے ضربی

مندرجہ ذیل جملوں کی تجزی کیجیے:

(1) (i) 6ا^{2}ب ج + 9ا ب^2 ج − 12اب ج^2

(ii) 2لا (پ + ق) + 3ما (پ + ق)

(2) (i) لا^{3} − 5لا^{2} + 3لا − 15

(ii) 3ا^{2} + 5ب ج − 5ا ب − 3ا ج

(3) (i) 16لا^{2} + 40لا ما + 25ما^{2} (ii) 64 − 80ما + 25ما^{2}

(4) (i) 9لا^{2} − 4ما^{2} (ii) 4ا^{2}ب^{2} − 1

(5) ا^{3}ب − اب^{3} [اشارہ: مشترک جزو اب ہے]

(6) (i) لا^{4} − ما^{4} (ii) 16لا^{5} − لا

(7) (i) (ا − ب)^{2} − ج^{2} (ii) 64لا^{2} − (7لا + 3ی)^{2}

(8) (i) لا^{2} − 2لا + 1 − ما^{2} (ii) 1 − ا^{2} − ب^{2} + 2اب

(9) (i) لا^{4} + 64 (ii) 4لا^{4} + 81

(10) (i) لا^{2} + 17لا + 60 (ii) لا^{2} + 17لا − 60

(11) (i) ما^{2} − 15ما + 54 (ii) ما^{2} − 15ما − 54

(12) 2لا^{2} + 8لا + 6 [اشارہ: مشترک جزو 2 ہے]

(13) (i) 6ا^{2} + 13ا + 5

(ii) 6لا^{2} + 13لا − 8

(14) (i) لا^{3}ما^{3} − 9لا^{2}ما^{2} + 20لا ما

(ii) 3لا^{2} − 10لا ما − 8ما^{2}

(15) کلیات کی مدد سے مختصر کیجیے:

(i) $47 \times 3.29 + 53 \times 3.29$

(ii) $(4.36)^2 + 4.36 \times 8.9 - 4.45 \times 4.45$

(iii) $$\frac{4.37 - 5.63}{4.37 \times 4.37 - 5.63 \times 5.63}$$

(iv) $$\frac{(35)^2 + 35 \times 55 \times 2 + 55 \times 55}{35 \times 35 - 55 \times 55}$$

مشق 10.11

جبری فقرے

(1) مندرجہ ذیل فقروں میں سے کون سے درست، کون سے غلط اور کون سے کھلے ہیں؟

(i) قائدِ اعظم محمّد علی جناح پاکستان کے بانی تھے۔

(ii) محرّم، سن ہجری کا پہلا مہینہ ہے۔

(iii) اُس نے پاک بھارت جنگ میں جامِ شہادت نوش کیا۔

$\frac{16}{9} = 1.\dot{7}$ (v) $3 \times 3 = 3 + 3$ (iv)

$35 = 3 + 5$ (vii) ${}^{2}5 = {}^{2}4 + {}^{2}3$ (vi)

$12 < 7 + 3$ (ix) $13 \neq 7 - \text{لا}$ (viii)

$3 + 2 - \not< 5-$ (x)

ذیل کی مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کریں:

$0 = \frac{\text{لا}18 - 6}{3} + \frac{5 + \text{لا}6}{2}$ (2)

$\frac{1 - \text{لا}4}{5} = \frac{5 + \text{لا}}{6} - 4\frac{1}{2}$ (3)

$(3 - \text{لا})\ \frac{1}{3} - 2 = \frac{16 + \text{لا}}{2}$ (4)

$(1 - \text{لا})2 - \text{لا} = (\text{لا} - 3)4 - 5$ (5)

$(1 - \text{لا})\ (1 + \text{لا}) = 5 + {}^{2}(1 - \text{لا})$ (6)

$7 = \text{ما} - \text{لا}3$ ، $14 = \text{ما} + \text{لا}4$ (7)

$0 = 6 - \text{ما}2 + \text{لا}5$ ، $0 = 18 - \text{ما}5 - \text{لا}4$ (8)

مشق 10.12

عبارتی سوالات متعلقہ مساوات

ہر سوال حل کرنے کے بعد اپنے جواب کی پڑتال بھی کیجیے :

(1) ایسے دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 36 اور فرق 6 ہو ۔

(2) 100 سیبوں کی دو ایسی ڈھیریاں لگائیں کہ ایک ڈھیری میں دوسری سے 10 سیب زیادہ ہوں ۔

(3) حمید کے پاس رشید سے تین گنا روپے ہیں ۔ اگر حمید رشید کو 20 روپے دے دے تو دونوں کے پاس برابر رقم ہو جائے گی ۔ بتائیے حمید کے پاس کتنی رقم ہے ۔

(4) ایک خاتون کی عمر اس کے بیٹے کی عمر سے دوگنی ہے ۔ 16 سال پہلے وہ اپنے بیٹے سے تگنی عمر کی تھی ۔ اُن کی موجودہ عمریں بتائیے ۔

(5) عذرا نے ایک درجن گلاس اور ایک درجن پیالیاں خریدنے میں کُل 30 روپے صَرف کیے ۔ ایک گلاس کی قیمت ایک پیالی کی قیمت سے 50 پیسے زیادہ ہے ۔ ایک پیالی کی قیمت بتائیں ۔

(6) ایک بانس کے آدھے حصّے پر سُرخ رنگ اور $\frac{1}{3}$ حصّے پر سبز رنگ ہے ۔ باقی 6 ڈیسی میٹر لمبا بانس سفید ہے ۔ بانس کی کُل لمبائی بتائیں ۔

(7) 5 کرسیوں اور 6 میزوں کی قیمت 560 روپے ہے اور 3 کرسیوں اور 2 میزوں کی قیمت 240 روپے ہے ۔ ایک کرسی اور دو میزوں کی قیمت بتائیے ۔

(8) ایک عدد دو ہندسوں کا ہے ۔ ہندسوں کا مجموعہ 10 ہے ۔ اگر عدد میں سے 18 تفریق کریں تو ہندسے اپنی جگہ بدل لیتے ہیں ۔ عدد بتائیے ۔

(9) دو ہندسوں والے ایک عدد کے دونوں ہندسوں کا مجموعہ 12 ہے ۔ جب عدد میں 36 جمع کیے جائیں تو ہندسے اپنی جگہ بدل لیتے ہیں ۔ عدد معلوم کریں ۔

(10) چھ سال پہلے ایک آدمی کی عمر اُس کے بیٹے کی عمر سے تگنی تھی اور چھ سال

بعد اس کی عمر بیٹے کی عمر سے دوگنی رہ جائے گی۔ اُن کی موجودہ عمریں بتائیے۔

مشق 10.13

جیومیٹری کے ابتدائی تصوّرات

(1) مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کر کے لکھیے:

(i) نقطہ ج نقاط ا اور ب کے درمیان ہوگا اگر م $\overline{\text{اج}}$ + ... = ...

(ii) نصف خط اب ، نقطہ .... کے علاوہ .... کے تمام نقاط پر مشتمل ہوتا ہے۔

(iii) زاویہ جس کی مقدار 90 سے زیادہ ہو، اُسے ...... زاویہ کہتے ہیں۔

(iv) $35°$ کے زاویے کا کمپلیمنٹ ...... کا زاویہ ہوگا۔

(v) $46°$ کے زاویے کا سپلیمنٹ ...... کا زاویہ ہوگا۔

(vi) اگر ایک خط دو ...... خطوط کو قطع کرے تو متبادلہ زاویے متماثل ہوں گے۔

(vii) اگر ایک خط دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو خطِ قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے ...... ہوتے ہیں۔

(viii) اگر دو خط باہم قطع کریں تو .... زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ix) رداسی قطعہ کی مقدار کو .... کہتے ہیں۔

(x) دائرہ کی لمبائی کو ...... کہتے ہیں۔

(2) مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے درست ہیں اور کون سے غلط؟

(i) قطعات اب اور اج زاویہ ب اج کا تعیّن کرتے ہیں۔

(ii) دو نقاط ہمیشہ ہم خط ہوتے ہیں۔

(iii) $\overleftarrow{\text{اب}}$ اور $\overleftarrow{\text{با}}$ کا یونین $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ہے۔

(iv) خط کے دو سرے ہوتے ہیں۔

(v) زاویہ، دو ہم سرا غیر ہم خط شعاعوں کا یونین ہوتا ہے۔

(vi) مسدس منتظم میں پانچ ضلعے ہوتے ہیں ۔

(3) مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک سیٹ کے متعلق بتائیے کہ آیا وہ کسی مثلث کے ضلعوں کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں یا نہیں ؟

(i) {5 سم ، 7 سم ، 10 سم} (ii) {6.5 سم ، 7 سم ، 2.4 سم}

(iii) {3 سم ، 4 سم ، 8 سم} (iv) {3 سم ، 5 سم ، 8 سم}

[اشارہ : مثلث کا بنانا اسی وقت ممکن ہے جس وقت کہ کسی دو ضلعوں کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلعے کی لمبائی سے بڑا ہو۔]

مشق 10.14

عملی جیومیٹری

(1) دو ایسے دائرے کھینچیے جن کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ 3.6 سم ہو اور ان کے رداس 1.7 سم اور 1.9 سم ہوں ۔

(2) پیمانے اور پروٹریکٹر کی مدد سے 135° کا زاویہ بنائیے۔ اب پرکار اور پیمانے کے ذریعے (i) اس کے متماثل ایک اور زاویہ بنائیے اور (ii) اس نئے زاویے کی تنصیف کیجیے ۔

(3) پرکار اور پیمانے کی مدد سے ذیل کے زاویے بنائیے ۔

75° ، 105° ، 135° ، $112\frac{1}{2}^\circ$

(4) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جس میں م $\overline{\text{ا ب}}$ = 3 سم ، م $\overline{\text{ب ج}}$ = 6 سم اور م $\overline{\text{ا ج}}$ = 4.5 سم ۔ ا سے $\overline{\text{ب ج}}$ پر عمود گرائیں ۔

(5) ایک مثلث ل م ن بنائیے جس میں م $\overline{\text{ل م}}$ = 3.8 سم ، م $\overline{\text{م ن}}$ = 4.3 سم اور م ن$\hat{\text{م}}$ل = 60° ، $\overline{\text{ل م}}$ اور $\overline{\text{م ن}}$ کے عمودی ناصف کھینچیے جو باہم نقطہ و پر قطع کریں۔ و کو مرکز مان کر م $\overline{\text{و ل}}$ رداس کا ایک دائرہ کھینچیے۔ کیا یہ دائرہ مثلث کے راسوں میں سے گزرتا ہے ؟

(6) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جبکہ م $\hat{\text{ب}}$ = 60° ، م $\hat{\text{ج}}$ = 75° اور م $\overline{\text{ا ب}}$ = 6 سم

ج میں سے گزرتا ہوا ایک خط د ر کھینچیے جو ا ب کے متوازی ہو ۔ ر ج ب کی پیمائش کیجیے ۔

(7) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جس میں م ا ب = 4.4 سم ، م ب = 30° اور م ا ج = 2.4 سم ۔

(8) ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جبکہ م ا ب = 3.6 سم ، م ب ج = 4 سم ، م ج د = م د ا = 3.7 سم اور م ا ج = 4.8 سم ۔

(9) ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جبکہ م ا ب = 7 سم ، م ب ج = 4 سم ، م ج د = 3 سم ، م د ا = 5 سم اور م ب ج د = 90° ۔ وتر ب د کی پیمائش کیجیے ۔

(10) ایک متوازی الاضلاع ا ب ج د بنائیے جس میں م ا ب = 3.2 سم، م ب ج = 4 سم اور م د = 30° ۔ ا سے ب ج پر عمود گرائیں اور ماپیں ۔

(11) ایک متوازی الاضلاع د س ل م بنائیں جس میں م د س = 4 سم، م س ل = 4.2 سم اور م د ل = 5 سم ۔

(12) ایک معین بنائیے جبکہ :

(i) اُس کا ایک ضلع 4.2 سم لمبا اور ایک زاویہ 135° کا ہو ۔

(ii) اُس کا ایک ضلع 2.8 سم لمبا ہو اور اُس کے ایک وتر کی مقدار 3 سم ہو ۔

(iii) اُس کے دونوں وتروں کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سم ہوں ۔ ضلع کی پیمائش کیجیے ۔

(13) ایک مربع بنائیے جس کا (i) ضلع 5 سم لمبا ہو (ii) وتر 6 سم لمبا ہو ۔

(14) ایک مستطیل بنائیے جس کے متصلہ اضلاع کی مقداریں 5 سم اور 4 سم ہوں ۔

(15) ایک ذوزنقہ ا ب ج د بنائیں جبکہ م ا ب = 4 سم، م ب ج = 2.5 سم ، م ج د = 2 سم اور م ب = 45°

(16) 6.5 سم لمبے قطعہ خط کو 3:2 کی نسبت سے تقسیم کیجیے ۔ ہر حصے کی پیمائش کیجیے اور حسابی عمل سے پڑتال کیجیے ۔

مشق 10.15

رقبہ ، احاطہ اور حجم وغیرہ

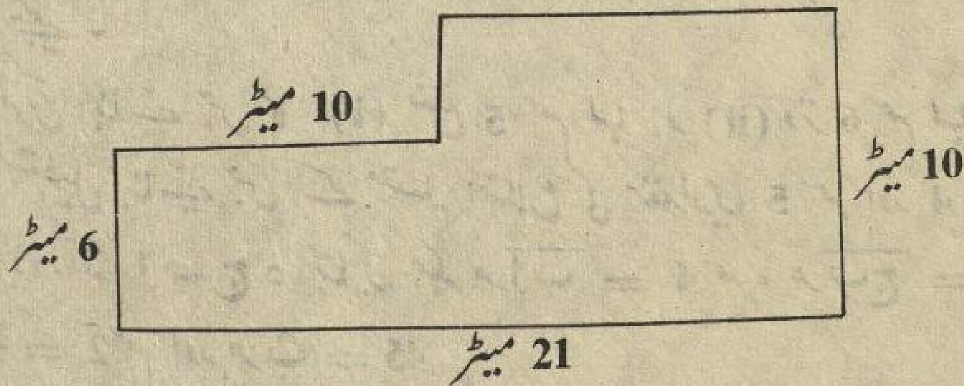
(1) ایک مالی نے ، ایک کوٹھی کے صحن میں ، ایک کیاری متوازی الاضلاع شکل کی بنائی ۔ اس کے متصلہ اضلاع کی لمبائیاں 6 میٹر اور 9 میٹر ہیں اور بڑے ضلع پر مقابل کے کونے سے جو عمود گرایا گیا ہے ، اُس کی لمبائی 3 میٹر ہے ۔ اس کا احاطہ معلوم کیجیے ۔ نیز متوازی الاضلاعی علاقے کا رقبہ بھی دریافت کیجیے ۔

(2) ایک مسجد میں چٹائیاں بچھانے کی جگہ 50 میٹر لمبی اور 36 میٹر چوڑی ہے ۔ اگر چٹائی 15 ڈیسی میٹر چوڑی ہو اور اس کی قیمت 6.5 روپے فی میٹر ہو تو بتائیے کہ مسجد کے فرش کے لیے چٹائیوں کی قیمت کیا ہوگی ۔

(3) ایک مستطیلی باغ کا طول 200 میٹر اور عرض 152 میٹر ہے ۔ اس کے گرداگرد اندر کی طرف 60 ڈیسی میٹر چوڑا راستہ بنا ہوا ہے ۔ راستے کا رقبہ نکالیے ۔

(4) ایک چوکور کا ایک وتر 36 میٹر لمبا ہے اور مقابل کے کونوں سے جو عمود اس وتر پر گرائے گئے ہیں ، اُن کی لمبائیاں 18 میٹر اور 21 میٹر ہیں ۔ چوکور علاقے کا رقبہ معلوم کریں ۔

(5) شکل میں دیے ہوئے فرش کا رقبہ نکالیے ۔



(6) ایک گول باغ کا رداس 56 میٹر ہے ۔ ایک کھلاڑی کو اس کے گرد 5 چکر لگانے کے لیے 6 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کتنا وقت درکار ہوگا ؟

(7) $10\frac{1}{2}$ میٹر رداس کے ایک گول میدان میں 3.20 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

(8) ایک گول قطعہ زمین کے قطر کی لمبائی 84 ڈیسی میٹر ہے۔ اُس کے گردا گرد باہر کی طرف 14 ڈیسی میٹر چوڑی سڑک بنی ہوئی ہے۔ سڑک کا رقبہ بتائیے۔

(9) بیل گاڑی کا ایک پہیّہ ایک کلومیٹر کے فاصلے میں 125 چکر کاٹتا ہے۔ اس کا رداس کتنے ڈیسی میٹر ہے؟

(10) ایک مثلثی علاقے کے رقبے کی مقدار معلوم کریں جب کہ اضلاع کی لمبائیاں 48 ڈیسی میٹر، 64 ڈیسی میٹر اور 80 ڈیسی میٹر ہوں۔

(11) 51 ڈیسی میٹر لمبا زینہ، ایک مکان کی دیوار کے ساتھ اس طرح لگا ہوا ہے کہ اُس کے پاؤں زمین پر دیوار سے 24 ڈیسی میٹر کے فاصلے پر ہے۔ بتائیے کہ زینے کا اُوپر کا سِرا زمین سے کِتنا بلند ہے۔

(12) ریڈیو کے ایریل کے دو بانس 33 ڈیسی میٹر اور 18 ڈیسی میٹر اُونچے ہیں۔ بتائیے کہ اُن کے کناروں پر باندھنے کے لیے کتنا لمبا تار درکار ہوگا جبکہ دونوں بانسوں کے قدموں کا درمیانی فاصلہ 36 ڈیسی میٹر ہے۔

(13) 63 ڈیسی میٹر رداس والے ایک گول میدان میں پھولوں کی تین کیاریاں بنی ہوئی ہیں۔ ایک کیاری 24 ڈیسی میٹر لمبے ضلع کا مربعی علاقہ ہے اور باقی دو متماثل الساقین مثلثی علاقے ہیں۔ ہر مثلث کا قاعدہ 30 ڈیسی میٹر لمبا ہے اور مقابل کے راس سے قاعدہ پر عمود، مقدار میں 15 ڈیسی میٹر ہے۔ تینوں کیاریوں کی جگہ چھوڑ کر باقی جگہ کا رقبہ دریافت کیجیے۔

(14) اگر آپ 20 میٹر لمبی، 36 ڈیسی میٹر اُونچی اور 45 سینٹی میٹر موٹی دیوار بنانا چاہیں تو 25 سینٹی میٹر لمبی، $12\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر چوڑی اور 8 سینٹی میٹر موٹی اینٹیں کِس قدر درکار ہوں گی؟ نیز بتائیے کہ 150 روپے فی ہزار اینٹ کے حساب سے کیا خرچ آئے گا۔

(15) 9 میٹر لمبا، 72 ڈیسی میٹر چوڑا اور 45 ڈیسی میٹر گہرا حوض پانی سے بھرا ہوا ہے۔ اگر ایک مشک میں 240 مکعب ڈیسی میٹر پانی سما سکتا ہو تو اس میں

سے کتنی مشکیں نکالیں کہ پانی کی سطح 9 ڈیسی میٹر نیچی ہو جائے ؟

(16) 12 ڈیسی میٹر لمبے قطر کا 63 ڈیسی میٹر گہرا کنواں کھودنے کے لیے کتنے مکعب ڈیسی میٹر مٹی کھودنی پڑے گی ؟ نیز کنوئیں کی اندرونی سطح پر پلستر کرانے کا خرچ بحساب 25 روپے فی مربع میٹر معلوم کریں۔

(17) ایک لوہے کے مکعب میں، جس کا ضلع 15 سینٹی میٹر لمبا ہے۔ ایک طرف سے 3.5 سینٹی میٹر رداس کا ایک گول سلنڈر نما 10 سینٹی میٹر گہرا سوراخ بنایا گیا ہے۔ باقی لوہے کا حجم دریافت کیجیے۔

(18) ایک مخروطی مینار کی عمودی بلندی $17\frac{1}{2}$ ڈیسی میٹر اور قاعدے کا قطر 36 ڈیسی میٹر لمبا ہے۔ اس کا حجم معلوم کیجیے۔

(19) ایک مخروطی خیمے کے لیے 14 ڈیسی میٹر عرض کی کتنی کینوس درکار ہوگی جو 42 ڈیسی میٹر لمبے قطر کی گول جگہ کو ڈھانپ لے اور درمیان سے جس کی بلندی 28 ڈیسی میٹر ہو ؟

اشارہ : ارتفاع مائل کی مقدار (ترچھی بلندی) $= \sqrt{(21)^2 + (28)^2}$

(20) ایک فوجی خیمہ مخروطی شکل کا ہے۔ اُس کی بلندی $31\frac{1}{2}$ ڈیسی میٹر اور اُس کے قاعدے کا قطر 40 ڈیسی میٹر لمبا ہے۔ اس خیمے میں 8 سپاہی سوتے ہیں۔ بتائیے ایک آدمی کو کتنے مکعب ڈیسی میٹر اوسطاً ہوا ملے گی ؟

جوابات

مشق 1.1

(1) {1}، {1، 2} اور ان کے علاوہ بھی تحتی سیٹ ہیں۔

(2) {t}، {x}، {x، y}، {t، y} ان کے علاوہ اور بھی تحتی سیٹ ہیں۔

(3) {4، 6، 8 ......}، {2، 4}، {2} ان کے علاوہ بھی کئی تحتی سیٹ ہیں۔ (تعداد غیر متناہی ہے)۔

(4) $\varnothing$ ، {2}، {3}، {3، 2}، {5} - اور بھی کئی تحتی سیٹ ہیں (تعداد غیر متناہی ہے)۔

(6) $\varnothing$ ، {1}، {3}، {3، 1}

(7) $\varnothing$ ، {2}، {5}، {0}، {2، 5}، {0، 2}، {5، 0}، {2، 5، 0}

مشق 1.2

(1) (i) {5، 4} (ii) {10، 9، 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2، 1}

(iii) {7، 6، 5، 4، 3، 2، 1} (iv) {5، 4، 3، 2}

(v) {7، 6، 5، 4} (vi) {10، ......، 4، 3، 2}

(2) (i) {19، ......، 11، 10}

(ii) {‎-19، ‎-18، ......، ‎-1، 0، 1، 2، ......، 99}

(iii) {99، ......، 2، 1} (iv) {50، ......، 2، 1}

(v) {50، ......، 11، 10} (vi) {50، ...... 2، 1}

(3) (i) {50، ......، 15، 10، 5} (ii) الف

(iii) الف (iv) {100، ......، 60، 55، 50، ......، 2، 1}

(v) جیم (vi) {100، ......، 55، 50، ......، 2، 1}

(4) (i) $\emptyset$ (ii) تمام صحیح اعداد کا سیٹ

(iii) الف (iv) ب

(v) $\emptyset$ (vi) تمام صحیح اعداد کا سیٹ $- \{0\}$

(5) (i) $\emptyset$

(ii) $\{1, -2, 0, 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$

(iii) الف (iv) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{6}\}$

(v) $\emptyset$ (vi) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, -1, -2, 0, 2, 4\}$

(6) (i) $\emptyset$ (ii) الف

(iii) الف (iv) الف $- \{0\}$

(v) جیم (vi) الف $- \{0\}$

(7) (i) $\emptyset$ (ii) الف

(iii) الف (iv) جیم

(v) جیم (vi) جیم

(8) (i) $\emptyset$ (ii) ایک $\{1\}$ کے سوا باقی تمام قدرتی اعداد کا سیٹ $\cup$ جیم

(iii) الف (iv) $\emptyset$

(v) $\emptyset$ (vi) جیم

(9) (i) ب (ii) $\{2, 4, 6, \ldots\} \cup \{5, 15, 25, 35, \ldots\}$

(iii) الف (iv) ب

(v) ب (vi) جیم

(10) (i) جیم (ii) الف

(iii) الف (iv) ب

(v) جیم (vi) ب

مشق 1.3

(1) ہاں (2) نہیں (3) ہاں (4) $\frac{0}{1}$، $\frac{1}{1}$، $-\frac{5}{1}$، $-\frac{7}{1}$

(5) $\frac{4}{4}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=1$

$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=2$

$\frac{20}{4}=\frac{15}{3}=\frac{10}{2}=5$

$-\frac{12}{4}=-\frac{9}{3}=-\frac{6}{2}=-3$ (6) $\varnothing$ (7) $\varnothing$ (8) $\{-2\}$

(9) $\varnothing$ (10) $\{\frac{1}{4}\}$ (11) $\{0\}$ (12) سیٹ N میں جمعی ذاتی عنصر، جمعی معکوس اور ضربی معکوس کا وجود نہیں۔ سیٹ I میں ضربی معکوس کا وجود نہیں۔ ان کے علاوہ باقی تمام خواص جو کہ Q میں ہیں ان میں بھی ہیں۔

(13) نہیں (14) I، Q (15) نہیں (16) کوئی نہیں (17) ضربی معکوس کا وجود

(18) درست نہیں (19) صحیح (20) غلط (21) صحیح (22) غلط

(23) صحیح (24) صحیح (25) صحیح (26) صحیح

(27) غلط (28) صحیح

مشق 2.1

(1) (i) $(13)_5$ (ii) $(30)_5$ (iii) $(232)_5$ (iv) $(414)_5$

(v) $(2122)_5$ (vi) $(12023)_5$ (vii) $(14414)_5$ (viii) $(130000)_5$

(ix) $(242313)_5$

(2) (i) $(101)_2$ (ii) $(111)_2$ (iii) $(10011)_2$

(iv) $(11110)_2$ (v) $(1011001)_2$ (vi) $(1100100)_2$

(vii) $(10011110)_2$ (viii) $(1010011010)_2$ (ix) $(1111111111)_2$

(3) (i) 14 (ii) 15 (iii) 39 (iv) 2

(v) 5 (vi) 32 (vii) 124 (viii) 1875

(ix) 14650 (x) 170 (xi) 512 (xii) 2047

مشق 2.2

(1) $(12)_5$ (2) $(3)_5$ (3) $(40)_5$ (4) $(114)_5$

(5) $(322)_5$ (6) $(1443)_5$ (7) $(1110)_5$ (8) $(4230)_5$

(9) $(10444)_5$ (10) $(12341)_5$ (11) $(3)_5$ (12) $(11)_5$

(13) $(4)_5$ (14) $(32)_5$ (15) $(132)_5$ (16) $(104)_5$

(17) $-(43)_5$ (18) $(202)_5$ (19) $-(1014)_5$ (20) $(112)_5$

(21) $(111)_2$ (22) $(1100)_2$ (23) $(100101)_2$

(24) $(100110110)_2$ (25) $(1)_2$ (26) $(10)_2$

(27) $-(11)_2$ (28) $(1110110)_2$ (29) $-(100000)_2$ (30) $-(11111)_2$

(31) $-(2)_5$ (32) $(43)_5$ (33) $(422)_5$ (34) $-(1222)_5$

(35) 3 (36) 6 (37) 260 (38) 51

(39) 227 (40) 8046

مشق 2.3

(1) $(13)_5$ (2) $(112)_5$ (3) $(2213)_5$

(4) $(3124)_5$ (5) $(2230)_5$ (6) $(12122)_5$

(7) $(220034)_5$ (8) $(203124)_5$ (9) $(110)_2$

(10) $(11110)_2$ (11) $(111111)_2$ (12) $(1110101)_2$

(13) $(1100101010)_2$ (14) $(1000111111)_2$ (15) 513

(16) 1365 (17) 9078 (18) 40404

مشق 3.1

(1) 5 (2) 6 (4) 2 (5) 2

(6) 2 (7) 3 (8) 3 (9) 4

(10) 3

مشق 3.2

81 (8) 93 (7) 57 (6) 72 (5) 98 (4) 28 (3)

17 (11) 44 (10) 67 (9)

مشق 3.3

258 (6) 614 (5) 102 (4) 297 (3) 473 (2) 241 (1)

513 (12) 216 (11) 208 (10) 230 (9) 376 (8) 315 (7)

101 (18) 3217 (17) 821 (16) 4621 (15) 811 (14) 981 (13)

2405 (24) 1029 (23) 403 (22) 740 (21) 365 (20) 739 (19)

1976 (25)

مشق 3.4

0.213 (37) 3.04 (36) 0.019 (35) 9.4 (34) 0.71 (33)

17.08 (42) 5.14 (41) 1.001 (40) 0.99 (39) 4.05 (38)

16.82 (47) 2.505 (46) 32.09 (45) 30.05 (44) 10.724 (43)

3.87 (48)

مشق 3.5

1.26 (5) 3.87 (4) 2.65 (3) 2.24 (2) 1.73 (1)

31.62 (10) 23.45 (9) 3.16 (8) 0.63 (7) 2.53 (6)

2.95 (15) 2.214 (14) 7.071 (13) 8.307 (12) 9.899 (11)

0.055 (20) 0.245 (19) 0.949 (18) 4.219 (17) 3.050 (16)

0.728 (25) 7.280 (24) 2.302 (23) 14.832 (22) 2.030 (21)

مشق 3.6

$\frac{12}{13}$ (6) $\frac{16}{15}$ (5) $2\frac{3}{4}$ (4) $2\frac{2}{5}$ (3) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ (1)

(7) 4.664 (8) 3.300 (9) 3.068 (10) 0.657 (11) 2.385

(12) 4.693 (13) 1.528 (14) 1.354 (15) 1.817 (16) 2.683

(17) 1.826 (18) 1.683

مشق 3.7

(1) 202 میٹر (2) 626.8 میٹر (3) 92 (4) 75 پیسے

(5) 336 میٹر، 112 میٹر (6) 33 میٹر، 22 میٹر (7) 28 میٹر (8) 100

(9) 11 (10) 10.5 میٹر

مشق 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 14 : 11 (iii) 7 : 5 (iv) 4 : 3 (v) 3 : 2

(2) (i) {4 : 3 ‘ 8 : 6 ‘ 12 : 9 ‘ 16 : 12 ‘ ....}

(ii) {5 : 6 ‘ 10 : 12 ‘ 15 : 18 ‘ 20 : 24 ‘ ....}

(iii) {7 : 2 ‘ 14 : 4 ‘ 21 : 6 ‘ 28 : 8 ‘ 35 : 10 ‘ ....}

(3) 6 : 5 (4) 5:6

(5) انعام (6) (i) 15 (ii) 4 (iii) 5 (7) 30 روپے

(8) 20 چمچے (9) 10 کوئنٹل (10) 15 سینٹی میٹر (11) 80 روپے

(12) $66\frac{2}{3}$ فیصد (13) 7557 روپے (14) 10410 روپے (15) 488 ڈیسی میٹر

مشق 4.2

(1) (i) زیادہ (ii) کم (iii) کم (iv) زیادہ (v) کم

(2) 12 دن (3) 5 گھنٹے (4) 10 گھنٹے (5) 240 چکر (6) 8 دن

(7) 35 دن (8) 15 دن (9) 3 کلومیٹر (10) 400 آدمی

(11) 12800 آدمی (12) 156 نمازی (13) 39 دن (14) 8 دن (15) 15 دن

مشق 4.3

(1) 1288 روپے (2) 60 روپے (3) 192 روپے (4) 27 روپے
(5) 75 آدمی (6) 16 دن (7) 25 آدمی (8) 35 دن
(9) 16 پیسے (10) 5 گھنٹے (11) 150 سکاؤٹ (12) 7 ہیکٹوگرام
(13) 250 آدمی (14) 54 آدمی (15) 5 آدمی

مشق 4.4

(1) 4 : 3 : 2 (2) 6 : 4 : 1 (3) 5 : 3 : 2 (4) 6 : 3 : 2
(5) 6 : 5 : 4 (6) 7 : 6 : 2 (7) 24 : 20 : 15 (8) 8 : 15 : 10
(9) 6 : 4 : 3 (10) 12 : 9 : 16 (11) 108 روپے، 180 روپے، 270 روپے
(12) 51، 102، 136 روپے (13) 96، 176، 168 بھیڑیں
(14) 250 روپے، 300 روپے، 337 روپے 50 پیسے
(15) 37 روپے 50 پیسے، 40 روپے، 50 روپے

مشق 5.1

(1) 5ا + 6ب + 4ج
(2) −2اب + 2بج + 2ج ا − 10
(3) 8ا^2 + 6ا + 13
(4) 20ا^3 − ا^{2}ب + 18ا ب^2 + 3ب^3
(5) (ا + م) لا^2 + (ب + ن) لا + ج + ی
(6) 4ا + 4ب
(7) −2اب^2 + بج^2 + 6جر^2
(8) (ا − ر) لا^3 + (ب − س) لا^2 + (ج − م) لا + د − ن
(9) 6ا^{2}ب − $\frac{1}{2}$ب^3 + 5اب^2 + ب − 14
(10) 3ا − 11ب + 13ج + 19

مشق 5.2

(1) اج + اد + بج + بد
(2) 8ا^{2} + 3ب^{2} − 2ج^{2} + 10اب − بج
(3) ا^{5} − 1
(4) ا^{5} + 2ا^{4}ب − 2ا^{2}ب^{3} + ب^{5}
(5) ا^{3}ب^{3} + 2ا^{2}ب^{3} + ا^{3}ب^{3}ج^{2} − ابج^{2} + 2ابج^{2} + ا^{2}ب^{2}ج^{3}
(6) ا^{3} + 4اب^{2} − 2ا^{2}ب + 4ابج − 4ب^{2}ج − ج^{3} − 2بج^{2}
(7) ا^{2} − اب + ب^{2}
(8) ا^{2} − اب + ب^{2}
(9) 3ب − ا
(10) ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} − اب − بج − جا

مشق 5.3

(1) 2ب
(2) صفر
(3) 2ا^{2} + 3ب^{2} − 4ج^{2}
(4) ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} + اب + بج + جا
(5) 2ا − 8ب + 7ج
(6) 2ب^{2} − 3ج^{2}
(7) 2ا + 2ج
(8) صفر
(9) −8 + 3ا − 2ا^{2} + ا^{3}
(10) ا + 2ب − 3ج
(11) (ا^{3} + ب^{3}) − (3ا^{2}ب + 3اب^{2})
(12) (ا^{2} + ج^{2} + جا) − (ب^{2} + اب + بج)
(13) (ا^{2} + ب^{2} + ج^{2}) − (بج + جا + اب)
(14) (ا^{2} + ب^{2} + 2جد) − (ج^{2} + د^{2} + 2اب)
(15) (ا^{4} + 16ا^{2} + 20ا) − (8ا^{3} + 5ا^{2} + 1)
(16) (الا + اما) + (بما + بلا)
(17) (الا^{4} + الا^{3}) − (بلا^{4} + بلا^{3})
(18) (الاما + الا^{2}) + (بمای + بما^{2}) − (جلای + جی^{2})
(19) −(2ابلاما + 2ابما^{2} + 2ابلا^{2}) + الا^{3} + بلا^{3}
(20) (الا^{3} + اما^{3}) − (3ا^{2}لا^{2}بما + 3الابما^{2})

مشق 5.4

(1) (i) 15 (ii) $\frac{3}{25}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{14}{15}$

(v) $17\frac{4}{15}$ (vi) $25\frac{106}{225}$ (vii) 20 (viii) 60

(ix) 116 (x) $5\frac{47}{54}$ (xi) 108 (xii) 59

(2) 12 ، 6 ، 2 ، 2 ، 30 (3) 2– ، 1– ، 4 ، 13

(4) 0 ، 33 ، 21– ، 30– ، 27– (5) 500,500

(6) 600 مربع میٹر (7) $7\frac{1}{2}$ مربع سم (8) 4 میٹر

(9) 5 میٹر (10) 5 (11) 68

(12) (i) 8 (ii) صفر (iii) 88– (iv) 100 (v) 14

(vi) 76– (vii) 16 (viii) صفر (ix) 2– (x) 8–

(13) 54 مربع میٹر (14) 14,910

(15) (i) درست (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) غلط

(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط (ix) درست (x) درست

مشق 5.5

(1) (i) 4ا^2+12+9 (ii) $25+70\text{ب}+49\text{ب}^2$

(iii) $16\text{ا}^2+24\text{اب}+9\text{ب}^2$ (iv) $\text{ا}^2+\text{اب}+\frac{1}{4}\text{ب}^2$

(v) $\frac{25}{64}\text{ا}^2+10\text{اب}+64\text{ب}^2$ (vi) $\frac{4}{9}\text{ا}^2+\frac{10}{9}\text{اب}+\frac{25}{36}\text{ب}^2$

(2) (i) $20\text{ا}^2+52\text{اب}+34\text{ب}^2$ (ii) $52\text{ا}^2+64\text{اب}+20\text{ب}^2$

(iii) $9\text{ا}^2+64\text{ب}^2+4\text{ج}^2+25\text{د}^2+48\text{اب}+20\text{جد}$

(iv) $39\text{ا}^2+66\text{ب}+27\text{ب}^2$ (v) $-32\text{ا}^2-44\text{اب}-12\text{ب}^2$

(vi) $9\text{ا}^2+81\text{ب}^2-25\text{ج}^2-49\text{د}^2+54\text{اب}-70\text{جد}$

(3) (i) 1,849 (ii) 11,881 (iii) 252,004

(iv) 1,002,001 (v) 100,120,036

(4) (i) $4اب$ (ii) $6اب$ (iii) $10ا$ (iv) $40اب$

(v) $اب$ (vi) $اب$ (vii) $ب^2$ (viii) $16ا^2$

(ix) $\frac{1}{4}ب^2$ (x) $\frac{1}{4}ا^2$ (xi) $ب^2$ (xii) $\frac{25}{36}ب^2$

مشق 5.6

(1) (i) $25ا^2 - 90ا + 81$ (ii) $49ا^2 - 154اب + 121ب^2$

(iii) $100ا^2 - 160اب + 64ب^2$ (iv) $16ا^2 - 96اب + 144ب^2$

(v) $\frac{49}{64}ا^2 - \frac{14}{9}اب + \frac{64}{81}ب^2$ (vi) $4ا^4 - 12ا^2ب^2 + 9ب^4$

(2) (i) $25ا^2 - 36اب + 13ب^2$ (ii) $61ا^2 - 136اب + 80ب^2$

(iii) $274ا^2 - 426اب + 181ب^2$ (iv) $24ا^2 + 10اب - 39ب^2$

(v) $-28ا^2 + 44اب - 16ب^2$ (vi) $24ا^2 - 92اب + 88ب^2$

(vii) $2ا^2 + 2ب^2$ (viii) $4اب$

(3) (i) 3,364 (ii) 9,025

(iii) 2,48,004 (iv) 992,016

(v) 39,88,009 (vi) 9,99,40,009

(4) (i) $12اب$ (ii) $6اب$ (iii) $28اب$ (iv) $4ب$ (v) $ا^2$

(vi) $\frac{ا^2}{4}$ (vii) $\frac{ب^2}{4}$ (viii) $64ب^2$

مشق 5.7

(1) (i) 5 (ii) 72 (iii) 10 (iv) 85

(v) 58 (vi) 13 (vii) 73

(2) (i) 256 (ii) 169 (iii) 64

(3) (i) 49 (ii) 121 (iii) 529 (iv) ل^{2} − 4ن

(4) (i) 62 (ii) 142 (iii) 439 (iv) 27

(v) 11 (vi) 51

(5) (i) 1154 (ii) 322

(6) (i) 7 ، −7 (ii) 5 ، −5

مشق 5.8

(1) (i) لا^{2} − 9ما^{2} (ii) 25ا^{2} − ب^{2} (iii) 36ا^{2} − 64ب^{2}

(iv) ا^{4} − ب^{4} (v) −1 (vi) 4ا − 25ب

(2) (i) لا^{4} − 16ما^{4} (ii) 625ا^{4} − 2401ب^{4} (iii) ا^{4} − ب^{4}

(iv) 256ا^{4} − 81ب^{4} (v) ا^{6} − ب^{6}

(3) (i) 4 (ii) 13 (iii) 74 (iv) 15 (v) 240

(4) (i) 2,484 (ii) 9,991 (iii) 9,919

(iv) 9,99,900 (v) 0.9996

مشق 5.9

(1) (i) لا^{2} + 13لا + 40 (ii) لا^{2} + 9لا − 52

(iii) لا^{2} − 10لا − 24 (iv) لا^{2} − 25لا + 150

(v) 16لا^{2} + 44لا + 30 (vi) 49لا^{2} + 42لا − 16

(vii) 9لا^{2} + 57لا + 88

(viii) اجلا^{2} − لا(اد + بج) + بد

(ix) دملا^{2} + لا(دص + مس) + سص

(x) ابجدلا^{2} + لا(ابگ + جدک) + کگ

(xi) لا^{4} + لا^{2}(ا^{2} + ب^{2}) + ا^{2}ب^{2}

(2) (i) 5لا + 17   (ii) 10لا + 174   (iii) 30لا

(iv) − لا − 5   (v) 16لا^2 − 39لا − 75

مشق 5.10

(1) 7(7لا + 1)   (2) 5(7لا^2 − 1)   (3) لا^2(لا^2 + 1)

(4) 4اب(ا − 2ب)   (5) 5لا^{3}ما ی(ما − 3لا ی)   (6) − 8(1 + 4لا^3)

(7) ا^2(ب − ج − ا)   (8) 2لا^2(2لا^2 − 3لا ما + 2ما^2)

(9) − اب ج(ا^{2}ب + ب^{2}ج + ج^{2}ا)   (10) 3ا^{2}ب^{2}ج^2(اب + 2ج − 3ب ج)

مشق 5.11

(1) (ب + ج) (لا + ما)   (2) (ط − ع) (لا + ما)

(3) (لا − ما) (ا + ب)   (4) (ا + ب) (لا^2 + ما^2)

(5) (2ب − 1) (ا − 3ج)   (6) (لا − 1) (لا^2 + 1)

(7) (اما − بلا) (الا − بما)   (8) (3 − 5لا) (2 + 3لا^2)

(9) (لا^2 + ما^2) (ا^2 + ب^2)   (10) (لا − 2ب) (3الاب + 2)

(11) (لا + ما + ی) (ا − ب)   (12) (2 − لا) (ا + لا + بلا^2)

مشق 5.12

(1) (لا + 5)^2 (2) (2ا + ب)^2 (3) (3ا + 2ب)^2

(4) 9(3ا + 2ب)^2 (5) (1 + 4اب ج)^2 (6) (7ا + 2ب)^2

(7) (5ا − 8)^2 (8) ($\frac{2}{3}$ا − $\frac{3}{4}$ب)^2 (9) (4اب − 3ج)^2

(10) (6ا − 5ب)^2 (11) (1 − 3ا^{2}ب^{2}ج)^2 (12) لا^2(2لا^2 − 5ما ی)^2

(13) (ا − ب + ج)^2 (14) (ا^2 + ب^2 + ج^2)^2 (15) (2ا + 3ب − 5ج)^2

(16) (ا − 2ب − ج)^2

مشق 5.13

(1) (ا−5) (ا+5)

(2) (7ا−9) (7ا+9)

(3) (8−ب) (8+ب)

(4) 9 (2ا−ب) (2ا+ب)

(5) ا^{2} (ب−ج) (ب+ج)

(6) (ا−ب) (ا+ب) (ا^{2}+ب^{2})

(7) (2ا−ب) (2ا+ب) (4ا^{2}+ب^{2})

(8) ا (ا−ب) (ا+ب)

(9) اب (2ا−ب) (2ا+ب)

(10) (اب^{2} − 4جد^{2}) (اب^{2} + 4جد^{2})

(11) (2ا+ب−2ج) (2ا+ب+2ج)

(12) (3لا+7ما−3ی) (3لا+7ما+3ی)

(13) (4−4ا−5ب) (4+4ا+5ب)

(14) −3ی (14لا+3ی)

(15) (ا−2ب) (5ا−8ب)

(16) (5ا−ب) (5ب−ا)

(17) (لا^{2}−2لا+2) (لا^{2}+2لا+2)

(18) (2لا^{2}−6لا+9) (2لا^{2}+6لا+9)

(19) (9ا^{2}+12اب+8ب^{2}) (9ا^{2}−12اب+8ب^{2})

(20) (4ا^{2}+6اب+9ب^{2}) (4ا^{2}−6اب+9ب^{2})

(21) (لا^{2}+لا+1) (لا^{2}−لا+1) (لا^{4}−لا^{2}+1)

(22) 197 (23) 297 (24) 495 (25) 0.344

مشق 5.14

(1) (لا+3) (لا+4)

(2) (لا+3) (لا+8)

(3) (لا+2) (لا+14)

(4) (لا+3) (لا+35)

(5) (لا−4) (لا−5)

(6) (لا−6) (لا−9)

(7) (لا−5) (لا−7)

(8) (لا−5) (لا−30)

(9) (لا+3) (لا−2)

(10) (لا+12) (لا−8)

(11) (لا+13) (لا−6)

(12) (لا−23) (لا+6)

(13) (لا−5) (لا+3)

(14) (لا−7) (لا+6)

(15) (لا−11) (لا+6)

(16) (لا−19) (لا+10)

(17) (3لا+2)(2لا+1)　(18) (3لا+4)(لا+3)

(19) (لا+2)(5لا+1)　(20) (لا+1)(13لا+3)

(21) (4لا−1)(3لا+2)　(22) (لا+2)(7لا−2)

(23) (لا−1)(4لا+13)　(24) (لا−1)(2لا+17)

(25) (3لا−7)(2لا+3)　(26) (2لا+1)(2لا−11)

(27) (لا−2)(11لا+3)　(28) (لا−1)(13لا+5)

(29) $(3لا^2+5)(2لا^2-1)$　(30) $(7لا^2-1)(7لا^2+2)$

مشق 6.1

(1) مترادف　(2) مترادف　(3) غیر مترادف　(4) مترادف

(5) غیر مترادف　(6) غیر مترادف　(7) مترادف　(8) {10}

(9) {20}　(10) {8}　(11) $\{\frac{5}{3}\}$　(12) {5}

(13) $\{\frac{20}{3}\}$　(14) {−1}　(15) $\{\frac{3}{4}\}$　(16) {2}

(17) {13}

مشق 6.2

(1) (ا) ہاں　(ب) ہاں　(ج) ہاں　(2) ہاں　(3) نہیں

(4) {(1، −3)}　(5) {(2، −7)}　(6) {(5، 1)}　(7) {(0، 2)}

(8) {(−1، 2)}　(9) {(−1، 3)}　(10) $\{(\frac{1}{2}، 3)\}$　(11) {(2، 3)}

(12) {(2، −2)}　(13) $\{(3، \frac{3}{2})\}$　(14) {(5، 4)}　(15) {(3، 4)}

مشق 6.3

(1) لا−5　(2) $\frac{5}{2}$ لا　(3) (لا+5) سال　(4) 2لا−7

(5) $(\frac{لا}{2}+3)$ روپے　(6) لا+10ما، ما+10لا　(7) لا+1، لا+3، لا+5

(8) $\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}}{10}\right)$ روپے　(9) 11　(10) 30　(11) 25، 27

(12) 62، 64، 66　(13) 6　(14) 36 میٹر، 25 میٹر

(15) 102 رنز، 34 رنز　(16) 495 روپے، 180 روپے، 150 روپے

(17) 200 روپے، 270 روپے، 430 روپے　(18) 90°، 45°

(19) 25 روپے، 75 روپے　(20) 56، 7 روپے فی میٹر　(21) 12، 18　(22) $\frac{5}{8}$

مشق 6.4

(1) 32، 21　(2) 29، 15　(3) 35، 46

(4) 8، 5　(5) 36　(6) $\frac{3}{8}$

(7) 92　(8) 98°، 82°　(9) 340 میٹر، 290 میٹر

(10) 16 میٹر، 10 میٹر　(11) 65 روپے، 30 روپے　(12) 3.50 روپے، 20 روپے

(13) 8، 9　(14) 37 سال، 11 سال　(15) 40 سال، 10 سال

(16) 6.5، 4.2 کلومیٹر فی گھنٹہ　(17) 28 کلومیٹر، 48 کلومیٹر　(18) 80 روپے، 64 روپے

(19) 300 روپے، 400 روپے　(20) 138 روپے، 184 روپے　(21) 16.4 کلومیٹر، 2.2 کلومیٹر

مشق 7.1

(1) (i) ا　(ii) کوئی بھی نقطہ باقی دو کے درمیان نہیں ہے۔

(iii) گ　(iv) کوئی بھی نقطہ باقی دو کے درمیان نہیں ہے۔

(2) (ا) کوئی نہیں　(ب) دو　(ج) ایک

(3) (i) خط ا ب، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$　(ii) خط س ش، $\overleftrightarrow{\text{سش}}$

(iii) شعاع ا د، $\overleftarrow{\text{اد}}$　(iv) شعاع ب د، $\overleftarrow{\text{بد}}$

(v) شعاع ل م، $\overleftarrow{\text{لم}}$　(vi) قطعۂ خط ا ب، $\overline{\text{اب}}$

(vii) قطعۂ خط ک گ، $\overline{\text{کگ}}$　(viii) نصف خط ت ب، $\overleftarrow{\text{تب}}$

(ix) نصف خط ب ا، ب ا

(4) ہاں

(5) (i) نقطہ ن خط م ل پر نقطہ ل سے پرے ہے اور نقطہ م خط ن ل پر نقطہ ل سے پرے ہے۔

(ii) رذ پر نقطہ د نقطہ ص سے پرے ہے اور دس پر نقطہ س نقطہ ل سے پرے ہے۔

(iii) پ د پر نقطہ ت نقطہ د سے پرے ہے اور ت د پر نقطہ پ نقطہ د سے پرے ہے۔

(6) (i) نقطہ ب نقاط ا اور ج کے درمیان واقع ہے۔

(ii) ک ل پر نقطہ م نقطہ ل سے

(iii) تمام نقاط کا سیٹ جو ا ب پر نقطہ ب سے پرے ہیں۔

(iv) تمام نقاط کا سیٹ جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں۔

(7) ہم سرا شعاعوں اور ہم خط شعاعوں کی تعریفیں پڑھیے اور فرق معلوم کیجیے۔ [آرٹیکل 7.6]

(8) (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) درست

(vi) غلط (vii) درست

(9) (ا) زاویہ کے بازوؤں پر کے نقاط نہ زاویہ کے اندرونہ میں ہوتے ہیں اور نہ ہی بیرونہ میں۔

(ب) خالی سیٹ

(10) ا ج (11) بیان (ب) درست ہے (12) تعریف پڑھیں۔ [آرٹیکل (2) 7.2]

مشق 7.2

(1) ب (2) ا (3) 55°، 50°، 45°، 25°، 16°

(4) متصلہ زاویوں کی تعریف پڑھیں۔ [آرٹیکل (2) 7.8]

(5) (i) متصلہ ہیں۔ (ii) متصلہ نہیں ہیں۔

(6) (i) متصلہ نہیں ہیں۔ (ii) متصلہ ہیں۔ (iii) متصلہ ہیں۔

(7) متصلہ نہیں ہیں۔

(8) (i) متصلہ نہیں ہیں۔ (ii) متصلہ ہیں۔ (iii) متصلہ ہیں۔

(9) (i) °135 ، °145 ، °95 ، °87 ، °73

(10) (i) 20 سم (ii) 2.5 سم (iii) 5.2 سم

(11) (i) 15 سم (ii) 6 سم (iii) 3 سم

(12) (i) 4 سم (ii) 5 سم (iii) 1.6 سم

(13) 20 میٹر (14) 30 میٹر

مشق 7.3

(1) متوازی ، غیر متقاطع (2) غیر متوازی ، متقاطع

(3) غیر متوازی ، متقاطع (4) غیر متوازی ، غیر متقاطع

(5) متوازی ، غیر متقاطع (6) متوازی ، غیر متقاطع

(7) غیر متوازی ، متقاطع (8) متوازی ، غیر متقاطع

(9) غیر متوازی ، متقاطع (10) متوازی ، غیر متقاطع

(11) غیر متوازی ، متقاطع (12) غیر متوازی ، غیر متقاطع

(13) متوازی ، غیر متقاطع (14) متوازی ، غیر متقاطع

(15) غیر متوازی ، متقاطع (16) غیر متوازی ، متقاطع

(17) متوازی ، غیر متقاطع (18) غیر متوازی ، متقاطع

(19) غیر متوازی ، غیر متقاطع (20) دیکھیں متوازی ہونے کی تعریف

(21) ہم سمت (22) مخالف سمت

(23) ہم سمت (24) مخالف سمت

(25) مخالف شعاعیں (26) ایک (27) نہیں

مشق 7.4

نوٹ : سوال 3 کے پورے جوابات درج کیے جا رہے ہیں ۔ اسی طرح باقی سوالات کے جوابات لکھیے ۔

(3) ذوزنقہ اب ج د ، متصلہ ضلعوں کے جوڑے: اب ، ب ج اور ب ج ، ج د اور ج د ، ا د اور ا د ، اب

متقابلہ اضلاع : اب ، ج د اور ا د ، ب ج

(4) مستطیل ل م ن و
(5) معیّن ک گ ل م
(6) مربّع ج د ر س
(7) متوازی الاضلاع ا ب ج د
(8) چوکور ا ب ج د

مشق 8.1

(1) 9 مربّع ڈیسی میٹر
(2) 1200 مربّع میٹر
(3) 389.5 مربّع میٹر
(4) 390 مربّع سم
(5) 10.318 مربّع ہیکٹو میٹر
(6) 17.48 مربّع سم
(7) 84 مربّع سم
(8) 600 مربّع ڈیسی میٹر
(9) 1800 مربّع ڈیکا میٹر
(10) 3060 مربّع سم
(11) 6300 مربّع ڈیسی میٹر
(12) 9.92 مربّع ہیکٹو میٹر تقریباً

مشق 8.2

(1) 231.36 مربّع سم تقریباً
(2) 323.1 مربّع ڈیسی میٹر تقریباً
(3) 3.23 مربّع میٹر تقریباً
(4) 2.32 مربّع میٹر تقریباً
(5) 7.16 مربّع میٹر تقریباً

مشق 9.1

(1) (i) کوئی سیدھا کنارہ نہیں۔ (ii) کوئی نقطہ راس نہیں۔ (iii) کوئی پہلو نہیں۔

نوٹ: سوال 2 تا 7 میں کناروں اور پہلوؤں کی تعداد قاعدہ پر کے کنارے اور پہلو چھوڑ کر دی گئی ہے۔

(2) (i) کوئی نہیں (ii) ایک (iii) کوئی نہیں

(3) (i) تین (ii) تین (iii) تین

(4) (i) چار (ii) چار (iii) چار

(5) (i) پانچ (ii) پانچ (iii) پانچ

(6) (i) چار (ii) ایک (iii) چار

(7) (i) پانچ (ii) ایک (iii) پانچ

(8) متماثل مستطیلیں (9) دو (10) چاروں، متماثل

مشق 9.2

(1) 704 مربع سم (2) 1584 مربع سم (3) 184.8 مربع میٹر (4) 1980 مربع ڈیسی میٹر

(5) 330 مربع سم (6) 1056 مربع ڈیسی میٹر (7) 414.86 مربع ڈیسی میٹر تقریباً

(8) 848.57 مربع ڈیسی میٹر تقریباً (9) 6 ڈیسی میٹر (10) 8 سم (11) 28 ڈیسی میٹر (12) 15 سم

مشق 9.3

(1) 15400 مکعب سم (2) 192.5 مکعب میٹر

(3) 5913600 مکعب ڈیسی میٹر (4) 10648 مکعب میٹر

(5) 6.16 مکعب میٹر (6) 4950 مکعب سم

(7) 1859 مکعب ڈیسی میٹر (8) 73333.33 مکعب سم

(9) 85470 مکعب میٹر (10) 1650 مکعب میٹر

(11) 2310 مکعب میٹر (12) 5632 مکعب میٹر

اعادہ نصاب

مشق 10.1

(1) (i) {11'7'5'3'2} (ii) {پ ، ا ، ک ، س ، ت ، ن}

(iii) { 2 } (iv) {شعبان ، رمضان} (v) { }

(2) (i) مکمل اعداد کا سیٹ

(ii) 5 پر تقسیم ہو جانے والے پہلے پانچ قدرتی اعداد کا سیٹ

(iii) 11 اور 20 کے درمیان طاق اعداد کا سیٹ

(iv) سال کے موسموں کا سیٹ

(v) شمسی سال کے آخری چار مہینوں کا سیٹ

(3) (i) الف = {3'2'1} اور با = {3'1'2}

(ii) جیم = {انار، آڑو، آم} اور میم = {جامن ، خوبانی، سیب}

(iii) شین = {5'4'3} اور لام = {7'6'5'4}

(iv) میم = {6'4'3} اور نون = {9'8'7'5}

(v) اگر سین = {قلم ، پنسل} اور صاد = {دوات ، قلم ، میز ، پنسل}

تو سیٹ سین سیٹ صاد کا تحتی سیٹ ہے - یعنی سین $\subset$ صاد

(4) (i) (ii) (iv) (vi) (vii) اور (iii)، (v)

(5) (i) مترادف سیٹ (ii) یک رُکنی

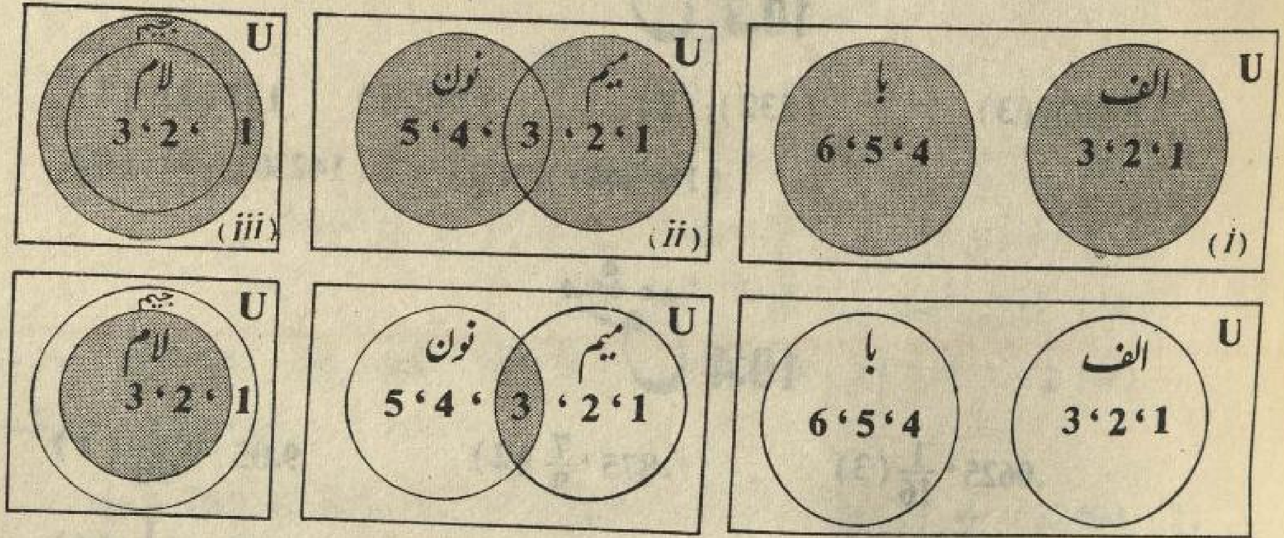
(iii) {ا ، ب ، س ، د ، ط} اور {ب} (iv) خالی

(v) تمام صحیح اعداد کا سیٹ ،خالی سیٹ (vi) فوقی (vii) {$\emptyset$}

(viii) { } (ix) ضربی معکوس (x) ضرب کی خاصیتِ مبادلہ

(6) { } ‘ {1} ‘ {2} ‘ {3} ‘ {2‘1} ‘ {3‘2} ‘ {3‘1} ‘ {3‘2‘1} - ان تحتی سیٹوں کی تعداد 8 ہے -

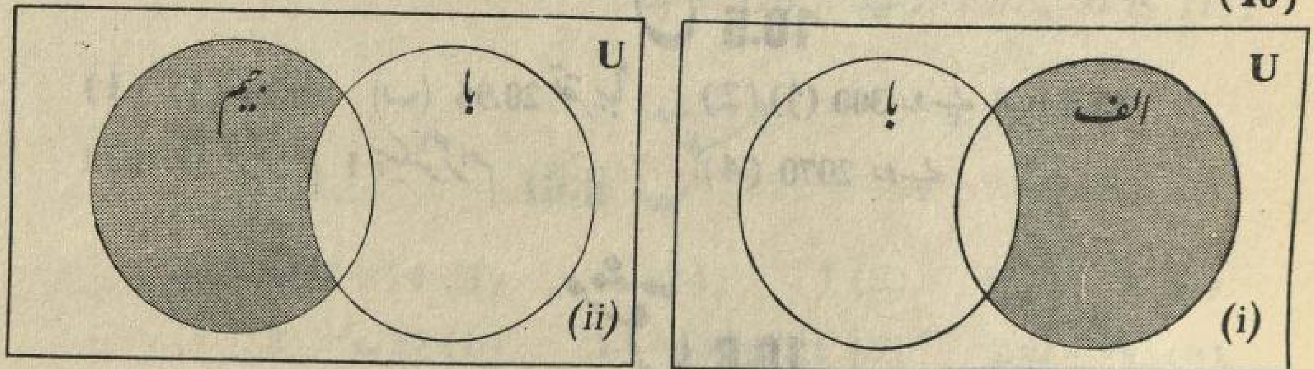
(7)



(8) (i) درست (ii) غلط (iii) غلط (iv) درست (v) غلط
(vi) غلط

(9) (i) {9،7،3} (ii) {8،6،5،4} (iii) {9،8،7،6،4،3}
(iv) {9،7،6،5،4،3} (v) {6،5،4}
(vi) {9،8،7،6،4،3} (vii) { }

(10)



باقی شکلیں خود بنائیں۔

مشق 10.2

(1) 25 (2) 17 (3) 4620 (4) 120 (5) 152 (6) 795

(7) (i) 1607 (ii) .1041 (iii) $5\frac{15}{22}$ (8) (i) 2.24 (ii) 3.76

(9) 85، 170 روپے (10) 84 میٹر

مشق 10.3

(1) (i) 137   (ii) 14   (2) $(232)_5$ (3) $(1000)_2$

(4) (i) $(14230)_5$ (ii) $(1000001)_2$

مشق 10.4

(1) $9\frac{1}{20}$ ‘ 9.05   (2) $\frac{7}{8}$ ‘ .875   (3) $\frac{1}{16}$ ‘ .0625

(4) $6\frac{1}{2}$ ‘ 6.5   (5) $4\frac{1}{6}$ ‘ $4.1\dot{6}$

(6) 6.05 ‘ 2.45 ‘ 14.8225 ‘ 5.929   (7) 9.3

(8) $\frac{1}{3}$ ، $\frac{25}{99}$ ، $\frac{47}{90}$ (9) 437.50 روپے   (10) 480 صفحے

مشق 10.5

(1) (أ) 10.24   (ب) 20.96 تقریباً   (2) (أ) 300 روپے (ب) 45.5

(3) 33 کلوگرام 1 ہیکٹوگرام   (4) 2070 روپے

مشق 10.6

(1) 800 روپے   (2) 2400 روپے   (3) 330 روپے ، 10835 روپے

(4) 120 روپے   (5) 315.25 روپے   (6) 129.04 روپے

(7) 7.50 روپے   (8) 70 روپے نقصان   (9) 14 % نفع

(10) 4 % نقصان   (11) 2700 روپے، 4 % نفع   (12) 288 روپے

(13) 4 % نقصان

مشق 10.7

(1) (i) مقداریں ایک ہی اکائی میں نہیں ہیں -

(ii) نسبت ایک عدد ہوتا ہے (اس لیے نسبت $\frac{2}{3}$ ہے)

(iii) مقداریں ایک ہی اکائی میں نہیں ہیں -

(iv) 3 : 2 (v) {5 : 2 ، 10 : 4 ، 20 : 8 ، 30 : 12 ، 40 : 16 ، .....} مترادف نسبتوں کا سیٹ ہے -

(2) 22400 روپے (3) 64 دن (4) ایک گھنٹہ 10 منٹ (5) 1620 روپے

(6) 24 دن (7) 10 آدمی (8) 60 آدمی

(9) بیوہ 1500 روپے ، لڑکا 2625 روپے ، لڑکی 1312.50 روپے

(10) 5520 روپے ، 3600 روپے ، 4680 روپے

(11) 750 روپے ، 700 روپے

(12) (i) 15 : 12 : 8 (ii) 6 : 20 : 15

(13) 75 روپے ، 100 روپے ، 120 روپے

مشق 10.8

(1) 97 (2) 1 (3) ا (4) −7 (5) 4ا^2 + 5اب − 2ب^2

(6) 3لا^2 + 2لاما (7) (i) لا^4 + لا^2 + 1 (ii) 27ب^3 − 8ج^3

(8) 2ا − 5ب (9) ا^2 − 2اب + ب^2 (10) 4ا^2 + 6اب + 9ب^2

مشق 10.9

(1) (i) 8ا^2 + 18ب^2 (ii) 24لاما (2) 1006009 (3) 801025

(4) (i) 81ا^4 − 16ب^4 (ii) لا^8 − ما^8 (5) 999900

(6) (i) لا، 4 (ii) -5، -5 (iii) 5لا، 3، 2

(7) (i) 10 (ii) 34 (8) (i) 23 (ii) 51

(9) 7، 3 (10) (i) 6 (ii) 8

مشق 10.10

(1) (i) 3ابج(2ا+3ب-4ج) (ii) (پ+ف)(2لا+3ما)

(2) (i) (لا-5)(لا^2+3) (ii) (3ا-5ب)(ا-ج)

(3) (i) (4لا+5ما)^2 (ii) (8-5ما)^2

(4) (i) (3لا+2ما)(3لا-2ما) (ii) (2اب+1)(2اب-1)

(5) اب(ا+ب)(ا-ب)

(6) (i) (لا^2+ما^2)(لا+ما)(لا-ما) (ii) لا(4لا^2+1)(2لا+1)(2لا-1)

(7) (i) (ا-ب+ج)(ا-ب-ج) (ii) 3(5لا+ی)(لا-3ی)

(8) (i) (لا-1+ما)(لا-1-ما) (ii) (1+ا-ب)(1-ا+ب)

(9) (i) (لا^2+8+4لا)(لا^2+8-4لا) (ii) (2لا^2+9+6لا)(2لا^2+9-6لا)

(10) (i) (لا+5)(لا+12) (ii) (لا+20)(لا-3)

(11) (i) (ما-9)(ما-6) (ii) (ما-18)(ما+3)

(12) 2(لا+1)(لا+3)

(13) (i) (3ا+5)(2ا+1) (ii) (3لا+8)(2لا-1)

(14) (i) لاما(لاما-5)(لاما-4) (ii) (لا-4ما)(3لا+2ما)

(15) (i) 329 (ii) .0081 (iii) .1 (iv) $4\frac{1}{2}$

مشق 10.11

(1) (i) درست (ii) درست (iii) کھلا (iv) غلط (v) درست

(vi) درست (vii) غلط (viii) کھلا (ix) غلط (x) درست

(2) $\{\frac{3}{2}\}$ (3) $\{4\}$ (4) $\{-6\}$ (5) $\{5\}$ (6) $\{3\frac{1}{2}\}$

(7) $\{(3 ، 2)\}$ (8) $\{(2 ، -2)\}$

مشق 10.12

(1) 21 ، 15 (2) 55 ، 45 (3) 60 روپے (4) 64 سال، 32 سال

(5) ایک روپیہ (6) 36 ڈیسی میٹر (7) 160 روپے (8) 64

(9) 48 (10) 42 سال ، 18 سال

مشق 10.13

(1) (i) $\overline{\text{م ا ج}} + \overline{\text{م ب ج}} = \overline{\text{م ا ب}}$ (ii) ا ، شعاع ا ب (iii) منفرجہ

(vi) °55 (v) °134 (iv) متوازی (vii) سپلیمنٹری (viii) راسی

(ix) رداس (x) محیط

(2) (i) درست (ii) درست (iii) درست (iv) غلط

(v) درست (vi) غلط

(3) (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں (iv) نہیں

مشق 10.14

(6) م ج ب = °60 (9) 5 سم (10) 1.6 سم (12) (iii) 5 سم

(16) 2.6 سم ، 3.9 سم

مشق 10.15

(1) 30 میٹر، 27 میٹر (2) 7800 روپے

(3) 4080 مربع میٹر

(4) 702 مربع میٹر

(5) 170 مربع میٹر

(6) $17\frac{3}{5}$ منٹ

(7) 1108.80 روپے

(8) 4312 مربع ڈیسی میٹر

(9) $12\frac{8}{11}$ ڈیسی میٹر

(10) 1536 مربع ڈیسی میٹر

(11) 45 ڈیسی میٹر

(12) 39 ڈیسی میٹر

(13) 11448 مربع ڈیسی میٹر

(14) 12960 اینٹیں ، 1944 روپے

(15) 243 مشکیں

(16) 7128 مکعب ڈیسی میٹر ، 594 روپے

(17) 2990 مکعب سینٹی میٹر

(18) 5940 مکعب ڈیسی میٹر

(19) 165 ڈیسی میٹر

(20) 1650 مکعب ڈیسی میٹر

تیار کردہ: پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور۔
بطور واحد نصابی کتاب برائے مدارس پنجاب
منظور کردہ، قومی ریویو کمیٹی، وزارتِ تعلیم حکومت پاکستان اسلام آباد

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد　　کشورِ حسین شاد باد
تو نشانِ عزمِ عالیشان　　ارضِ پاکستان!
مرکزِ یقین شاد باد

پاک سرزمین کا نظام　　قوّتِ اخوّتِ عوام
قوم، ملک، سلطنت　　پایندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مراد

پرچم ستارہ و ہلال　　رہبرِ ترقی و کمال
ترجمانِ ماضی شانِ حال　　جانِ استقبال!
سایۂ خدائے ذوالجلال

تاریخ اشاعت	اشاعتِ اوّل	تعداد اشاعت	قیمت
مارچ 1986ء	بار دوم	77,000	9.85